GENERAL LIBRARY
AUG 30 1919
UNIV. OF MICH.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schlesinger, Schottky, Schwarz, Stäckel

von

K. Hensel.

Band 149.

Heft 1/2.

Ausgegeben den 7. Februar

Berlin W. 10

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1919.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Jeder Band 20 Mark.

Band 149. Heft 1/2.

Inhaltsverzeichnis.

Haar, Alfred, Über die Variation der Doppelintegrale . . . . . Seite 1

Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der mathematischen Wissenschaften . . . . . — 18

Jolles, Stanislaus, Invarianz und Umkehrung von Projektivitäten und Kollineationen. (Mit 4 Figuren) . . . . . — 19

Epstein, Paul, Über Elementarkettenbrüche, lineare Substitutionen und indefinite binäre quadratische Formen. I. . . . . — 57

Bauer, Michael, Zur Theorie der Fundamentalgleichung . . . . . — 89

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Die fortdauernd steigenden Kosten für alle Materialien und Arbeitslöhne zwingen dazu, den Preis dieser Zeitschrift vom 149. Bande ab auf M. 20.— pro Band zu erhöhen. Verlag und Redaktion bitten die Leser, den unentweichlichen Verhältnissen Rechnung tragen zu wollen und der Zeitschrift treu zu bleiben.

An die Herren Mitarbeiter!

Die Inanspruchnahme des größten Teils der Rohstoffe für die Papierfabrikation seitens der Heeresverwaltung hat die Kriegswirtschaftsstelle für die Papier verarbeitenden Gewerbe gezwungen, die Zuteilung von Papier für Druckwerke ganz erheblich einzuschränken und die Lieferung von Frei- und Werbeexemplaren von Zeitschriften und Zeitungen zu verbieten. So sieht sich der Verlag nicht mehr imstande, den Herren Mitarbeitern Sonderdrucke ihrer Beiträge in unbeschränkter Zahl zur Verfügung stellen zu können, er kann fortab jedem der Herren Verfasser bis auf weiteres nur noch die seither unberechnet zugestandenen 25 Separate liefern und bittet freundlichst, davon Kenntnis nehmen zu wollen.

In Hochachtung und Ergebenheit

Georg Reimer.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schlesinger, Schottky, Schwarz, Stäckel

von

K. Hensel.

Band 149.

In vier Heften.

Berlin,
W. 10, Genthinerstraße 38.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1919.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 149.

	Seite
Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der mathematischen Wissenschaften	18
Bauer, Michael, Zur Theorie der Fundamentalgleichung	89— 96
Epstein, Paul, Über Elementarkettenbrüche, lineare Substitutionen und indefinite binäre quadratische Formen. I.	57— 88
Haar, Alfred, Über die Variation der Doppelintegrale	1— 18
Hensel, Kurt, Über die Invarianten algebraischer Körper	125—146
Jolles, Stanislaus, Invarianz und Umkehrung von Projektivitäten und Kollineationen. (Mit 4 Figuren)	19— 56
Ostrowski, Alexander, Über ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern	117—124
Pólya, Georg, Über ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern	97—116
Speiser, Andreas, Die Zerlegungsgruppe	174—188
Welmin, W., Das quadratische Reziprozitätsgesetz im beliebigen quadratischen Zahlkörper	147—173

Ausgabedaten der Hefte von Band 149.

Heft 1/2 ausgegeben am 7. Februar 1919.

Heft 3/4 ausgegeben am 17. Mai 1919.

Über die Variation der Doppelintegrale.

Von Herrn *Alfred Haar* in Klausenburg (Kolozsvár).

Unter dem Fundamentalsatz der Variationsrechnung pflegt man — soweit es sich um Probleme handelt, bei denen die unbekannten Funktionen nur von einer Veränderlichen abhängen — das folgende von *P. Du Bois Reymond* herrührende Theorem zu verstehen:

Ist $u(x)$ eine Funktion von x, welche stetig ist im Intervall $x_1 \leqq x \leqq x_2$ und ist

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x) \frac{d\zeta}{dx} dx = 0$$

für alle Funktionen $\zeta(x)$, welche in x_1 und x_2 verschwinden und eine stetige Ableitung im betrachteten Intervall besitzen, so ist $u(x) = \text{const.}$

Mit Hilfe dieses Theorems leitet man bekanntlich in der Variationsrechnung aus dem Verschwinden der ersten Variation die *Euler-Lagrange*schen Differentialgleichungen ab, wobei man außer der Existenz und Stetigkeit der ersten Ableitung der Lösungen, keine weiteren Annahmen über den Charakter dieser Funktionen zu machen braucht.

Wenn man hingegen diejenigen einfachsten Probleme der Variationsrechnung betrachtet, bei denen die unbekannte Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen abhängt, so ist es bisher nicht gelungen, das Problem in Differentialgleichungen umzusetzen ohne die — ganz unnatürliche — Einschränkung zu machen, daß die Lösung eine zweimal stetig differenzierbare Funktion ihrer Veränderlichen sein soll. In der Tat kann

in diesem Falle — wie Herr *Hadamard* durch ein einfaches Beispiel gezeigt hat*) — aus dem Verschwinden der ersten Variation nicht auf die Existenz der zweiten Ableitungen der unbekannten Funktion geschlossen werden; in dem von Herrn *Hadamard* angegebenen überaus einfachen Beispiel kann man unmittelbar einsehen, daß die erste Variation eines Doppelintegrals ganz wohl verschwinden kann, ohne daß die Lösung zweite Ableitungen irgendwelcher Art besitzen müßte.

Nach dieser *Hadamard*schen Bemerkung schien es zunächst unmöglich, das Verschwinden der ersten Variation, ohne weitere Annahmen, in Differentialgleichungen umzusetzen, m. a. W. für die Lösung des Variationsproblems, ohne die Existenz der zweiten Ableitungen vorauszusetzen, Differentialgleichungen abzuleiten. Dennoch gelingt dies mit Hilfe eines Theorems, das in voller Analogie mit dem oben erwähnten *Du Bois Reymond*schen Lemma bei Problemen, bei denen zwei unabhängige Veränderliche auftreten, dieselbe Rolle spielt, wie der Fundamentalsatz der Variationsrechnung bei Problemen mit einer unabhängigen Veränderlichen.

Dieses Theorem, dessen Ableitung das Hauptziel der vorliegenden Arbeit bildet, lautet, wie folgt:

Sind $u(x,y)$ und $v(x,y)$ zwei Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x und y, welche in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ stetig sind, und ist

$$\iint_{(\mathfrak{B})} \left(u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dxdy=0$$

für alle Funktionen $\zeta(x,y)$, welche auf der Berandung des Bereiches $\mathfrak{B}$ verschwinden und innerhalb $\mathfrak{B}$ stetige Ableitungen erster Ordnung besitzen, so ist das längs irgendeiner im Innern von $\mathfrak{B}$ verlaufenden geschlossenen Kurve C genommene Integral

$$\int_{(\mathcal{C})} (u\,dy - v\,dx) = 0;$$

mit anderen Worten: *es existiert unter den gemachten Voraussetzungen eine Funktion $\omega(x,y)$, die in unserem Bereiche $\mathfrak{B}$ samt ihren Ableitungen erster*

*) Comptes Rendus, Bd. 144, S. 1092—1093. Ein anderes Beispiel — wo es sich sogar um ein reguläres Variationsproblem handelt — gab *L. Lichtenstein.* Math. Ann. Bd. 69, S. 514—516.

Ordnung stetig ist und deren Ableitungen nach x und y bezw. mit den Funktionen — $v(x,y)$ und $u(x,y)$ übereinstimmen:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -v(x,y), \qquad \frac{\partial \omega}{\partial y} = u(x,y).$$

§ 1 der vorliegenden Arbeit enthält den Beweis dieses Theorems. Im § 2 behandeln wir die Variationsprobleme

$$\iint_{(\mathfrak{B})} f(p,q,x,y)\,dx\,dy = \text{min.} \quad \text{und} \quad \iint_{(\mathfrak{B})} f(p,q,z,x,y)\,dx\,dy = \text{min.}$$

$$\left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Auf Grund des im § 1 bewiesenen Theorems gelingt, es für jede Lösung dieser Variationsprobleme, deren erste Ableitungen stetige Funktionen des Ortes im Bereiche $\mathfrak{B}$ sind, *ohne weitere Annahmen über diese Funktionen zu machen*, ein System von Differentialgleichungen aufzustellen, das im ersten Falle aus zwei, im zweiten Falle aber aus drei Differentialgleichungen besteht. Es treten zu der Funktion $z(x,y)$ im ersten Falle eine, im zweiten Falle zwei unbestimmte Hilfsfunktionen hinzu, so daß in beiden Fällen die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der zu bestimmenden Funktionen übereinstimmt.

Am Ende der Arbeit stellen wir einige Verallgemeinerungen unsrer Fragestellung auf, die bei den entsprechenden Problemen der Variationsrechnung eine analoge Rolle spielen, wie unser Theorem des § 1 bei den einfachsten Problemen dieser Art.

§ 1.

Den Beweis des oben ausgesprochenen Theorems erbringen wir in vier Schritten.

1.) Wir zeigen *zuerst*, daß zufolge unsrer Annahme das Integral

$$\iint_{(\mathfrak{B})} \left(u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) dx\,dy$$

auch dann gleich Null ausfällt, wenn die auf der Berandung von $\mathfrak{B}$ verschwindende Funktion $\zeta(x,y)$ *eine Kante aufweist.* Ich verstehe darunter,

daß ein regulärer Kurvenzug*) (etwa eine Gerade) innerhalb $\mathfrak{B}$ existiert, längs dessen die Ableitungen $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ und $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ (die sonst überall stetige im Bereiche $\mathfrak{B}$ definierte Funktionen sind) endliche Sprünge erleiden.

Um dies darzutun, bezeichnen wir mit M eine positive Größe, die größer ist, als die absoluten Maxima der vier Funktionen

$$u(x,y), \quad v(x,y), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

im Bereiche $\mathfrak{B}$, und umgeben den Kurvenzug, längs dessen die letzten beiden Funktionen unstetig werden, durch eine reguläre geschlossene Kurve (etwa einen Polygonzug), die ganz im Inneren von $\mathfrak{B}$ verlaufend ein Bereich $\mathfrak{b}$ vom Flächeninhalt δ umgrenzt. Natürlich können wir diese geschlossene Kurve derart bestimmen, daß dieser Flächeninhalt beliebig klein ausfällt. Sodann konstruieren wir eine Hilfsfunktion $\bar{\zeta}(x,y)$, die in dem außerhalb $\mathfrak{b}$ liegenden Teil des ursprünglichen Bereichs $\mathfrak{B}$ mit $\zeta(x,y)$ übereinstimmt, innerhalb $\mathfrak{b}$ aber von $\zeta(x,y)$ verschieden ist und daselbst stetige ersten Ableitungen besitzt, deren absoluten Beträge unterhalb M liegen**). Da diese Hilfsfunktion auf der Berandung von $\mathfrak{B}$ verschwindet, innerhalb $\mathfrak{B}$ aber stetige Ableitungen erster Ordnung aufweist, so ist zufolge unsrer Voraussetzung

$$\iint_{(\mathfrak{B})} \left(u \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} \right) dx\,dy = 0,$$

und daraus folgt unmittelbar

$$\iint_{(\mathfrak{B})} \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dx\,dy = \iint_{(\mathfrak{b})} \left(u \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} \right) \right) dx\,dy.$$

Da aber alle Funktionen

$$u, \quad v, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y}$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als M ausfallen und δ den Flächen-

---

*) Bei der Anwendung wird dieser Kurvenzug eine gerade Linie sein.

**) Die Existenz dieser Hilfsfunktion ist ohne weiteres klar.

inhalt des Bereiches $\mathfrak{b}$ bedeutet, so ist das letzte Integral dem Betrage nach sicherlich kleiner als

$$4M^2\delta;$$

also ist jedenfalls

$$\left|\iint\limits_{(\mathfrak{B})}\left(u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dx\,dy\right|\leqq 4M^2\delta.$$

Daraus folgt aber, da δ eine beliebig kleine positive Größe bedeutet,

$$\iint\limits_{(\mathfrak{B})}\left(u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dx\,dy=0.$$

2.) Wir beweisen *zweitens*, daß *das Integral*

$$\int\limits_{(Q)}(u\,dy-v\,dx)$$

verschwindet, wenn Q den Rand irgendeines innerhalb $\mathfrak{B}$ liegenden Quadrates bedeutet, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind.

Zu diesem Ende führe ich ein besonderes Koordinatensystem ein, das in bestimmter Hinsicht den Polarkoordinaten ähnlich ist, wobei aber konzentrische und ähnlich orientierte Quadrate diejenige Rolle spielen, die bei den Polarkoordinaten den konzentrischen Kreisen um den Anfangspunkt zukommt. Es sei nämlich (x,y) ein gewöhnliches rechtwinkliges Koordinatensystem und O sein Anfangspunkt. Ist P ein willkürlicher Punkt der Ebene, dessen Cartesische Koordinaten x und y sein mögen, so definieren wir die eine der neuen Koordinaten als den Winkel ϑ, den die Richtung OP mit der positiven x-Achse bildet. Als andre Koordinate ϱ, die wir stets positiv rechnen, nehmen wir die halbe Seitenlänge desjenigen um O als Mittelpunkt beschriebenen Quadrates, dessen Seiten den Achsen parallel gerichtet sind und das durch den Punkt P hindurchgeht.

Die erste der jetzt definierten Koordinaten ϑ ergibt sich aus den Cartesischen Koordinaten vermöge der Formel

$$(1.)\qquad tg\,\vartheta=\frac{y}{x}.$$

Für unsre zweite Koordinate ϱ hingegen erhalten wir verschiedene Aus-

drücke, je nachdem ϑ die eine der vier folgenden Ungleichungen erfüllt:

$$\begin{array}{cccc} \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} \\ -\frac{\pi}{4} \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{4}, & \frac{\pi}{4} \leqq \vartheta \leqq \frac{3\pi}{4}, & \frac{3\pi}{4} \leqq \vartheta \leqq \frac{5\pi}{4}, & \frac{5\pi}{4} \leqq \vartheta \leqq \frac{7\pi}{4}. \end{array}$$

Durch diese 4 Ungleichungen wird die Ebene in 4 Quadranten zerlegt, die wir bezw. mit I, II, III, IV bezeichnen wollen. Für jeden dieser 4 Quadranten finden wir die folgenden Ausdrücke für unsre zweite Koordinate ϱ:

$$(2.) \qquad \begin{array}{lll} \text{In} & \text{I. ist } x = \varrho & \text{also } y = \varrho\, tg\, \vartheta, \\ \text{,,} & \text{II. ,, } y = \varrho & \text{,, } x = \varrho\, ctg\, \vartheta, \\ \text{,,} & \text{III. ,, } x = -\varrho & \text{,, } y = -\varrho\, tg\, \vartheta, \\ \text{,,} & \text{IV. ,, } y = -\varrho & \text{,, } x = -\varrho\, ctg\, \vartheta. \end{array}$$

Dementsprechend erhält auch die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varrho,\vartheta)} = \frac{\partial x}{\partial \varrho}\frac{\partial y}{\partial \vartheta} - \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial y}{\partial \varrho}$$

in den 4 verschiedenen Quadranten verschiedene Ausdrücke. Eine leichte Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(\varrho,\vartheta)} &= \frac{\varrho}{\cos^2\vartheta} \text{ in den Quadranten I. und III.,} \\ &= \frac{\varrho}{\sin^2\vartheta} \text{ ,, ,, ,, II. ,, IV.} \end{aligned}$$

Ist nun $f(x,y)$ eine beliebige differenzierbare Funktion der beiden Variablen x und y und führen wir statt dieser unsre neuen, vermöge der Gleichungen (1.) und (2.) definierten Variablen ein, so geht $f(x,y)$ in eine Funktion von ϱ und ϑ über. Drücken wir die Ableitungen dieser Funktion nach den ursprünglichen Veränderlichen durch die Ableitungen nach den neuen Variablen aus, so erhalten wir naturgemäß verschiedene Relationen, je nachdem, in welchem der 4 Quadranten der Punkt (x,y) liegt. Auf diese Weise erhalten wir, falls x,y die Koordinaten eines Punktes des I. oder III. Quadranten bedeutet

$$(3.) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \pm\frac{\partial f}{\partial \varrho} \mp \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\varrho}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \pm\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\frac{\cos^2\vartheta}{\varrho}, \end{aligned}$$

wobei überall das obere bezw. untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem der Punkt (x,y) im I. oder III. Quadranten liegt. Entsprechend ergibt sich für Punkte des II. und IV. Quadranten

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \mp \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\frac{\sin^2\vartheta}{\varrho},\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \pm \frac{\partial f}{\partial \varrho} \pm \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\varrho},\end{aligned} \tag{4.}$$

wobei wiederum überall das obere bezw. untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem der Punkt im II. oder IV. Quadranten liegt.

Schließlich transformieren wir noch das über $\mathfrak{B}$ erstreckte Integral

$$\iint_{(\mathfrak{B})} \left(u\frac{\partial\zeta}{\partial x} + v\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dx\,dy$$

auf unsre neuen Koordinanten.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{B}_{\mathrm{II}}$, $\mathfrak{B}_{\mathrm{III}}$, $\mathfrak{B}_{\mathrm{IV}}$ diejenigen Teile des Bereiches $\mathfrak{B}$, die bezw. in den I., II., III., IV. Quadranten der Ebene liegen, so geht mit Rücksicht auf die Formeln (3.) und (4.) das letzte Integral in die Summe der folgenden 4 Integrale über:

$$\iint_{(\mathfrak{B}_{\mathrm{I}})} \left\{u\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\varrho} - \frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\varrho}\right) + v\frac{\partial\zeta}{\partial\varrho}\frac{\cos^2\vartheta}{\varrho}\right\}\frac{\varrho}{\cos^2\vartheta}\,d\varrho\,d\vartheta +$$

$$\iint_{(\mathfrak{B}_{\mathrm{II}})} \left\{u\left(-\frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\frac{\sin^2\vartheta}{\varrho}\right) + v\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\varrho} + \frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\varrho}\right)\right\}\frac{\varrho}{\sin^2\vartheta}\,d\varrho\,d\vartheta +$$

$$+\iint_{(\mathfrak{B}_{\mathrm{III}})} \left\{u\left(-\frac{\partial\zeta}{\partial\varrho} + \frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\varrho}\right) + v\left(-\frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\frac{\cos^2\vartheta}{\varrho}\right)\right\}\frac{\varrho}{\cos^2\vartheta}\,d\varrho\,d\vartheta +$$

$$+\iint_{(\mathfrak{B}_{\mathrm{IV}})} \left\{u\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\frac{\sin^2\vartheta}{\varrho}\right) + v\left(-\frac{\partial\zeta}{\partial\varrho} - \frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\varrho}\right)\right\}\frac{\varrho}{\sin^2\vartheta}\,d\varrho\,d\vartheta.$$

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir zu dem Beweise unsrer Behauptung zurück, daß das Integral

$$\int_{(\mathfrak{Q})} (u\,dy - v\,dx)$$

verschwindet, wenn Q irgendein ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ liegendes Quadrat bedeutet, dessen Seiten bezw. der x- und y-Achse parallel gerichtet sind.

Es seien also Q_1 und Q_2 zwei konzentrische und ähnlich orientierte Quadrate, deren Seiten die verlangten Richtungen besitzen. Wir verlegen dann durch eine Koordinatenverschiebung den Anfangspunkt unsres Koordinatensystems in den gemeinsamen Mittelpunkt dieser Quadrate, deren halbe Seitenlänge α_1 bezw. α_2 sein mögen $(\alpha_1 < \alpha_2)$. Wir nehmen noch an, daß beide Quadrate innerhalb des Bereiches $\mathfrak{B}$ liegen, und beweisen nun unsre Behauptung für diese Quadrate wie folgt:

Auf Grund der Formeln (1.) und (2.) führen wir statt x und y die dort definierten Variablen ρ und ϑ ein und definieren dann mit Hilfe dieser Veränderlichen eine Funktion ζ von folgender Art:

ζ sei außerhalb des Quadrates Q_2 und innerhalb des Quadrates Q_1 überall gleich Null; in dem zwischen den Quadraten Q_1 und Q_2 liegenden ringförmigen Gebiet sei ζ eine willkürliche stetige und stetig differenzierbare Funktion der Koordinate ρ allein, die für $\rho = \alpha_1$ und $\rho = \alpha_2$ samt ihrer Ableitung verschwindet. Diese Funktion nimmt offenbar längs den Quadraten, die mit Q_1 und Q_2 konzentrisch und diesen ähnlich orientiert sind, konstante Werte an. Unsre Funktion ist innerhalb des Bereiches $\mathfrak{B}$ überall stetig; ihre Ableitung nach ϑ ist überall gleich Null und nach unsrer Definition ist auch die Ableitung nach ρ eine stetige Funktion des Ortes. Fassen wir diese Funktion als Funktion der ursprünglichen Koordinaten x und y auf, so ist die so entstehende Funktion $\zeta(x, y)$ natürlich wiederum stetig; ihre Ableitungen $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ und $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ sind — wie die Formeln (3.) und (4.) zeigen — ebenfalls stetige Funktionen des Ortes, mit Ausnahme derjenigen Stellen, wo zwei Quadranten der Ebene zusammenstoßen; das sind aber diejenigen Stellen, wo ϑ einen der 4 Werte $\pm\frac{\pi}{4}, \pm 3\frac{\pi}{4}$ annimmt. Mit anderen Worten die Ableitungen $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ und $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ können endliche Sprünge längs derjenigen Geraden erleiden, die die entsprechenden Ecken der Quadrate Q_1 und Q_2 verbinden; außerhalb dieser 4 Strecken sind diese Ableitungen stetige Funktionen von x und y.

Auf Grund der zuerst gemachten Bemerkung können wir also schließen, daß das Integral:

$$\iint\limits_{(\mathfrak{B})} \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dx\, dy = 0$$

sein muß, sowie ζ eine der soeben konstruierten Funktionen bedeutet.

Mit Benutzung der Veränderlichen ϱ und ϑ und in Anbetracht dessen, daß überall $\frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} = 0$ ist, geht unser letztes Integral in die Summe der vier folgenden über:

$$\iint\limits_{(\mathfrak{B}_{\mathrm{I}})} u \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} \frac{\varrho}{\cos^2 \vartheta}\, d\varrho\, d\vartheta + \iint\limits_{(\mathfrak{B}_{\mathrm{II}})} v \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} \frac{\varrho}{\sin^2 \vartheta}\, d\varrho\, d\vartheta$$

$$- \iint\limits_{(\mathfrak{B}_{\mathrm{III}})} u \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} \frac{\varrho}{\cos^2 \vartheta}\, d\varrho\, d\vartheta - \iint\limits_{(\mathfrak{B}_{\mathrm{IV}})} v \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} \frac{\varrho}{\sin^2 \vartheta}\, d\varrho\, d\vartheta = 0;$$

hierbei bedeuten wieder $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{B}_{\mathrm{II}}$, $\mathfrak{B}_{\mathrm{III}}$, $\mathfrak{B}_{\mathrm{IV}}$ diejenigen Teile des Bereiches $\mathfrak{B}$, die in den entsprechenden Quadranten der Ebene liegen, und es kommt jedesmal nur derjenige Teil dieser Bereiche in Betracht, der zwischen den Quadraten Q_1 und Q_2 liegt, da außerhalb Q_2 und innerhalb Q_1 $\zeta = 0$ ist.

Führen wir noch zur Abkürzung die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} u \frac{\varrho}{\cos^2 \vartheta}\, d\vartheta = u_1(\varrho), \qquad -\int\limits_{3\pi/4}^{5\pi/4} u \frac{\varrho}{\cos^2 \vartheta}\, d\vartheta = u_2(\varrho),$$

$$\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} v \frac{\varrho}{\sin^2 \vartheta}\, d\vartheta = v_1(\varrho), \qquad -\int\limits_{5\pi/4}^{7\pi/4} v \frac{\varrho}{\sin^2 \vartheta}\, d\vartheta = v_2(\varrho),$$

so geht unsre letzte Gleichung in die folgende über:

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} \left(u_1(\varrho) + u_2(\varrho) + v_1(\varrho) + v_2(\varrho) \right) d\varrho = 0.$$

Da aber $\zeta(\varrho)$ eine willkürliche Funktion der Veränderlichen ϱ bedeutet, die nur der Einschränkung unterworfen ist, im Intervall $\alpha_1 \leqq \varrho \leqq \alpha_2$ samt ihrer Ableitung stetig zu sein und in den Endpunkten dieses Intervalls samt ihrer Ableitung zu verschwinden, so folgt aus dem bekannten *Du Bois Reymond*schen Lemma

$$u_1(\varrho) + u_2(\varrho) + v_1(\varrho) + v_2(\varrho) = \text{const.}$$

Wir schreiten nun zur Untersuchung der Bedeutung der einzelnen Glieder dieser Summe. Wir bezeichnen zu diesem Zwecke bezw. mit

$$l_{\mathrm{I}}^{(\varrho)},\ l_{\mathrm{II}}^{(\varrho)},\ l_{\mathrm{III}}^{(\varrho)},\ l_{\mathrm{IV}}^{(\varrho)}$$

die in den Quadranten I, II, III, IV liegenden Seiten desjenigen Quadrates $Q^{(\varrho)}$, dessen halbe Seitenlänge gleich ϱ ist und das den Quadraten Q_1 und Q konzentrisch und ähnlich orientiert ist. Dann ist offenbar

$$u_1(\varrho) = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} u \frac{\varrho}{\cos^2\vartheta} d\vartheta = \int_{(l_{\mathrm{I}}^{(\varrho)})} u\, d(\varrho \operatorname{tg}\vartheta) = \int_{(l_{\mathrm{I}}^{(\varrho)})} u\, dy,$$

und da für die der y-Achse parallel laufende Seite $l_{\mathrm{I}}^{(\varrho)}$ offenbar

$$\int_{(l_{\mathrm{I}}^{(\varrho)})} v\, dx = 0$$

ist, so können wir schreiben:

$$u_1(\varrho) = \int_{(l_{\mathrm{I}}^{(\varrho)})} (u\, dy - v\, dx).$$

Ganz analog ergibt sich

$$u_2(\varrho) = -\int_{3\pi/4}^{5\pi/4} u \frac{\varrho}{\cos^2\vartheta} d\vartheta = \int_{(l_{\mathrm{III}}^{(\varrho)})} u\, d(-\varrho \operatorname{tg}\vartheta) = \int_{(l_{\mathrm{III}}^{(\varrho)})} u\, dy = \int_{(l_{\mathrm{III}}^{(\varrho)})} (u\, dy - v\, dx);$$

und man erhält in gleicher Weise

$$v_1(\varrho) = \int_{(l_{\mathrm{II}}^{(\varrho)})} (u\, dy - v\, dx), \quad v_2(\varrho) = \int_{(l_{\mathrm{IV}}^{(\varrho)})} (u\, dy - v\, dx).$$

Durch Addition der zuletzt gewonnenen vier Gleichungen erhalten wir das Resultat

$$u_1(\varrho) + u_2(\varrho) + v_1(\varrho) + v_2(\varrho) = \int_{(Q^{(\varrho)})} (u\, dy - v\, dx) = \text{const.}$$

in Anbetracht dessen, daß $l_{\mathrm{I}}^{(\varrho)}$, $l_{\mathrm{II}}^{(\varrho)}$, $l_{\mathrm{III}}^{(\varrho)}$, $l_{\mathrm{IV}}^{(\varrho)}$ die vier Seiten des Quadrates $Q^{(\varrho)}$ bezeichnen. Diese Gleichung lehrt aber, daß das Integral

$$\int (u\, dy - v\, dx)$$

erstreckt über irgendein Quadrat um den Anfangspunkt, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel laufen, stets denselben Wert annimmt. Aus der Stetigkeit der Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ kann sofort geschlossen werden, daß dieser Wert von Null nicht verschieden sein kann, da man

dieses Integral unter jede Grenze herabdrücken kann, indem man das Quadrat hinreichend klein wählt.

Damit ist aber die oben aufgestellte Behauptung

$$\int_{(Q)}(u\,dy - v\,dx) = 0$$

vollständig bewiesen.

3.) Wir zeigen *drittens*, daß das Integral

$$\int_{(R)}(u\,dy - v\,dx)$$

auch dann gleich Null sein muß, wenn der *Integrationsweg R ein Parallelogramm ist, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel gerichtet sind.*

Diese Behauptung kann man unmittelbar auf den in 2^0) bewiesenen Satz zurückführen, falls die Seitenlängen des Rechtecks R kommensurabel sind, d. h. sich verhalten wie zwei ganze Zahlen. In der Tat, es läßt sich in diesem Falle das Rechteck aus einer endlichen Anzahl von Quadraten aufbauen, deren Seiten wiederum die vorgeschriebenen Richtungen aufweisen. Das über R erstreckte Integral geht daher in eine endliche Summe von Integralen (genommen über die einzelnen Quadrate) über. Da jedes dieser letzteren Integrale — zufolge des soeben bewiesenen Satzes — verschwindet, so ist auch das über unser Parallelogramm R erstreckte Integral gleich Null.

Falls die Seitenlängen des Parallelogramms R inkommensurabel sind, so kann man die oben ausgeführte Zerlegung in Quadrate nicht durchführen; wohl kann man aber das Parallelogramm R durch solche Rechtecke $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ beliebig approximieren, deren Seitenlängen kommensurabel sind, für die also das Integral verschwindet. Zufolge der Stetigkeit der Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ ist aber

$$\lim_{n=\infty}\int_{(R_n)}(u\,dy - v\,dx) = \int_{(R)}(u\,dy - v\,dx),$$

woraus man unmittelbar schließt, daß

$$\int_{(R)}(u\,dy - v\,dx) = 0$$

sein muß.

Damit ist also das Verschwinden des fraglichen Integrals für jedes Rechteck bewiesen, das innerhalb $\mathfrak{B}$ liegt und dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel gerichtet sind.

Daraus folgt aber auch, daß *unser Integral auch für einen solchen geschlossenen Integrationsweg verschwinden muß, der* — ganz innerhalb $\mathfrak{B}$ verlaufend — *aus einer endlichen Anzahl von Geradenstücken, die der x- oder y-Achse parallel sind, besteht.* In der Tat, man kann jedes Gebiet, das durch eine endliche Anzahl solcher Geraden begrenzt ist, aus Rechtecken aufbauen, deren Seiten wiederum den Achsen parallel sind. Da für jedes dieser Rechtecke unser Integral gleich Null ist, so muß es auch für die Begrenzung des aus diesen Rechtecken aufgebauten Gebietes verschwinden.

4.) Auf Grund der letzten Tatsache bietet der Beweis unseres Theorems keine Schwierigkeiten.

Es sei nämlich O ein fester, P ein variabler Punkt unseres Bereiches $\mathfrak{B}$. Wir zeichnen irgendeinen Linienzug, der — wie oben — aus einer endlichen Anzahl von Geradenstücken besteht, die abwechselnd der x- und y-Achse parallel sind, ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ liegt und vom Punkte O bis zum Punkte P hinführt. Bilden wir nun das Integral

$$\int_O^P (u\,dy - v\,dx)$$

längs irgendeines dieser Linienzüge, so erhalten wir stets denselben Wert, da dieses Integral für einen geschlossenen Linienzug dieser Art verschwindet. Sind x, y die Koordinaten des Punktes P, so erhalten wir auf diese Weise eine Funktion des Ortes

$$\omega(x, y) = \int_O^P (u\,dy - v\,dx),$$

die für jeden Punkt innerhalb $\mathfrak{B}$ definiert ist. (Als Integrationsweg kann *zunächst* nur ein Linienzug der beschriebenen Art zugelassen werden.) Diese Funktion $\omega(x, y)$ ist, zufolge der angenommenen Stetigkeit der Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$, selbst stetig; wir schreiten nun zur Berechnung ihrer Ableitungen erster Ordnung.

Um $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ zu berechnen, führen wir vom Punkte O zum Punkte P einen Linienzug, der wiederum aus einer endlichen Anzahl von Strecken besteht, die den Achsen parallel sind, von der Beschaffenheit, daß der letzte (den Punkt P enthaltende) Zug dieser Kurve der x-Achse parallel sein möge. Dann ist offenbar — für ein hinreichend kleines h —

$$\omega(x+h, y) - \omega(x, y) = \int_{x,y}^{x+h,y} (u\,dy - v\,dx),$$

wobei als Integrationsweg diejenige gerade Linie genommen ist, die die Punkte (x, y) und $(x+h, y)$ verbindet. Da längs dieser Geraden $y = \text{const.}$ ist, so finden wir

$$\frac{\omega(x+h, y) - \omega(x, y)}{h} = -\frac{1}{h}\int_{x,y}^{x+h,y} v\,dx.$$

Daraus ergibt sich durch den Grenzübergang $h = 0$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -v(x, y).$$

In derselben Weise findet man — indem man von O nach P einen Linienzug der beschriebenen Art legt, dessen letzter Zug der y-Achse parallel ist — die Ableitung nach y

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = u(x, y).$$

Mit anderen Worten, die oben *definierte Funktion* $\omega(x, y)$ *besitzt stetige Ableitungen nach* x *und* y, *und es ist*

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -v(x, y), \qquad \frac{\partial \omega}{\partial y} = u(x, y),$$

d. h. auf Grund der gemachten Voraussetzungen folgt, *daß* u *und* v *— abgesehen vom Vorzeichen — die Ableitungen derselben Funktion nach* y *bezw.* x *sind.* Daraus folgt aber sofort, daß *das Integral*

$$\int (u\,dy - v\,dx) = \int \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \omega}{\partial y}\,dy\right)$$

für jeden geschlossenen Integrationsweg — der natürlich innerhalb $\mathfrak{B}$ verlaufen muß — *verschwindet.*

Damit ist unser Theorem in allen Teilen bewiesen.

Unsere Voraussetzung, die das Verschwinden des Integrals

$$\iint_{(\mathfrak{B})} \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dx\, dy$$

verlangte, für jede nach x und y stetig differenzierbare und auf der Berandung von $\mathfrak{B}$ verschwindende Funktion ζ, hat also zur Folge, daß der Integrand in der Form einer Funktionaldeterminante geschrieben werden kann:

$$u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial (\zeta, \omega)}{\partial (x, y)}.$$

§ 2.

Unser im § 1. abgeleitetes Theorem spielt in der Theorie der Funktionen zweier unabhängigen Variablen eine entsprechende Rolle, wie das *Du Bois Reymond*sche Lemma in der Theorie der Funktionen einer Veränderlichen.

Man kann mit Hilfe unseres Theorems die Bedingung des Verschwindens der ersten Variation eines Doppelintegrals in Differentialgleichungen umsetzen, ohne die Existenz der zweiten Ableitungen der Lösungen des entsprechenden Variationsproblems vorauszusetzen.

Um dies darzutun, behandeln wir zunächst bei gegebenen Randbedingungen das Variationsproblem

$$\iint_{(\mathfrak{B})} f(p, q, x, y)\, dx\, dy = \text{min.},$$

wo — wie üblich — p und q die Ableitungen der gesuchten Funktion $z(x, y)$ bedeuten:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q.$$

f möge eine analytische Funktion für die in Betracht kommenden Wertesysteme p, q, x, y bedeuten.

Ist die Funktion $z = z(x, y)$ die Lösung dieses Variationsproblems, von der wir nur voraussetzen, daß *sie stetige Ableitungen erster Ordnung* innerhalb $\mathfrak{B}$ besitzt, so zeigt man in der Variationsrechnung, daß das Integral

$$\iint_{(\mathfrak{B})} \left(\frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dx\, dy$$

stets verschwinden muß, sowie $\zeta(x, y)$ eine willkürliche innerhalb $\mathfrak{B}$ definierte stetige und stetig differenzierbare Funktion bedeutet, die auf der Berandung von $\mathfrak{B}$ verschwindet. Da in diesem Integral

$$u(x, y) = \frac{\partial f}{\partial p} \text{ und } v(x, y) = \frac{\partial f}{\partial q}$$

stetige Funktionen von x und y sind, so folgt aus unserem Theorem die Existenz einer innerhalb $\mathfrak{B}$ definierten stetigen Funktion $\omega(x, y)$, die daselbst stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt und so beschaffen ist, daß

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial q}, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial p}$$

ausfällt. Mit anderen Worten, *die unbekannte Funktion $z = z(x, y)$ befriedigt in Gemeinschaft mit dieser Hilfsfunktion $\omega(x, y)$ das eben aufgeschriebene System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung.*

Im allgemeinen existieren die zweiten Ableitungen der Funktion $\omega(x, y)$ nicht; ist dies aber dennoch der Fall, so resultiert aus unseren Gleichungen durch Elimination von $\omega(x, y)$ sofort die bekannte *Lagrange*sche Differentialgleichung zweiter Ordnung der Variationsrechnung. Allgemein kann man aber nur schließen, daß wenn $z(x, y)$ eine in $\mathfrak{B}$ nach x und y stetig differenzierbare Lösung des obigen Variationsproblems ist, diese Funktion das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = -\frac{\partial \omega}{\partial x}$$

befriedigt.

Wenn der Integrand des Variationsproblems die unbekannte Funktion z explizite enthält, so ist das entsprechende Differentialgleichungssystem nicht mehr so einfach. Man gelangt in diesem Falle, ohne die Existenz der zweiten Ableitungen der Funktion $z(x, y)$ vorauszusetzen, zu einem Gleichungssystem, das aus drei Differentialgleichungen besteht und das die Funktion $z(x, y)$ und zwei weitere Hilfsfunktionen $\omega(x, y)$ und $\Omega(x, y)$ enthält in folgender Weise:

Wenn $z(x, y)$ eine solche Lösung des Variationsproblems

$$\iint_{(\mathfrak{B})} f(p, q, z, x, y)\, dx\, dy = \min.$$

(bei gegebenen Randbedingungen) bedeutet, deren erste Ableitungen stetige Funktionen im Bereiche $\mathfrak{B}$ sind, so ist — wie man in der Variationsrechnung zeigt — das Integral

$$(5.) \qquad \iint_{(\mathfrak{B})} \left(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\zeta\right) dx\, dy$$

stets gleich Null, sowie $\zeta(x, y)$ eine auf der Berandung von $\mathfrak{B}$ verschwindende Funktion bedeutet, die innerhalb $\mathfrak{B}$ stetige Ableitungen nach x und y besitzt. Wir setzen nun zur Abkürzung

$$2\Omega(x, y) = \int_a^x \int_b^y \frac{\partial f}{\partial z}\, dx\, dy;$$

diese Hilfsfunktion $\Omega(x, y)$ besitzt offenbar stetige Ableitungen nach x und y, und es existiert auch der gemischte Differentialquotient zweiter Ordnung

$$2\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Da die Funktion $\zeta(x, y)$ auf der Berandung von $\mathfrak{B}$ verschwindet, so bestehen offenbar die Relationen

$$\iint_{(\mathfrak{B})} \zeta \frac{\partial f}{\partial z}\, dx\, dy = 2\iint_{(\mathfrak{B})} \zeta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}\, dx\, dy = -2\iint_{(\mathfrak{B})} \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \Omega}{\partial y}\, dx\, dy$$
$$= -2\iint_{(\mathfrak{B})} \frac{\partial \zeta}{\partial y}\frac{\partial \Omega}{\partial x}\, dx\, dy;$$

und unsre Bedingung (5.) erhält die folgende Form:

$$\iint_{(\mathfrak{B})} \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right\} dx\, dy = 0.$$

Da die beiden in Klammern stehenden Ausdrücke

$$u(x, y) = \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \text{ und } v(x, y) = \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

stetige Funktionen von x und y sind, so folgt aus der letzten Gleichung, auf Grund unseres im § 1. bewiesenen Theorems, die Existenz einer nach x und y im Bereiche $\mathfrak{B}$ stetig differenzierbaren Funktion $\omega(x, y)$ von der Eigenschaft, daß

$$\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} = -\frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

Mit anderen Worten: ***Jede Lösung des vorgelegten Variationsproblems, die stetige***

Ableitungen 1. Ordnung besitzt, erfüllt in Gemeinschaft mit zwei Hilfsfunktionen $\omega(x, y)$ und $\Omega(x, y)$, die beide in $\mathfrak{B}$ nach x und y stetig differenzierbar sind, für die zweite auch noch der gemischte Differentialquotient zweiter Ordnung existiert und stetig ist, das folgende simultane System von drei Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = -\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2\,\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x\,\partial y}.$$

Durch die Aufstellung dieses Gleichungssystems — das das vorangehende als Spezialfall enthält — ist das Problem, das Verschwinden der ersten Variation eines Doppelintegrals in Differentialgleichungen umzusetzen, *ohne die Existenz der zweiten Ableitungen vorauszusetzen*, vollständig gelöst.

Ich bemerke noch, daß man das soeben gewonnene Differentialgleichungssystem in gleicher Weise bei der Weiterführung der Variationsrechnung zugrunde legen kann, wie die übliche *Euler-Langrange*sche Differentialgleichung, bei deren Herleitung man die Existenz der zweiten Ableitungen der Lösungen voraussetzen muß.

Die Fragestellung, die durch unser im § 1. bewiesenes Theorem beantwortet wurde, sowie die Methode des Beweisganges gestattet Verallgemeinerungen in verschiedenen Richtungen. Obwohl diese einerseits ein selbständiges Interesse beanspruchen, so wird man andrerseits durch die entsprechende Behandlung der analogen Probleme der Variationsrechnung auf sie geführt. Es mögen hier zwei Probleme dieser Art gestellt werden.

I. Das Integral

$$\iint_{(\mathfrak{B})} \left(u\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + 2\,v\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\,\partial y} + w\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) dx\,dy$$

verschwinde, sowie $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ gegebene stetige —, $\zeta(x, y)$ aber eine beliebige Funktion bedeutet, die auf der Berandung von $\mathfrak{B}$ samt ihren Ableitungen erster Ordnung verschwindet und innerhalb $\mathfrak{B}$ stetige Ableitungen 1. und 2. Ordnung besitzt; was kann aus diesem Umstande für die Funktionen u, v, w gefolgert werden?

II. Es bedeute G ein dreidimensionales Gebiet, $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ Funktionen von x, y, z, die in diesem Gebiet stetig sind; es möge ferner

$$\iiint_{(G)} \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = 0$$

sein, sowie $\zeta(x, y, z)$ irgendeine auf der Begrenzung von G verschwindende und innerhalb G nach x, y, z stetig differenzierbare Funktion bedeutet; was kann aus diesem Umstande für die Funktionen u, v, w geschlossen werden?*)

*) Die Resultate dieser Note wurden der ungarischen Akademie der Wissenschaften in ihrer Sitzung vom 10. April 1916 vorgelegt.

Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der mathematischen Wissenschaften.

Der von Herrn Hofrat Dr. Alfred Ackermann-Teubner in Leipzig im Jahre 1912 bei der Universität Leipzig errichtete „Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der mathematischen Wissenschaften“ ist in diesem Jahre durch das Preisgericht Herrn Professor Dr. L. Prandtl in Göttingen für die Arbeit über „den Luftwiderstand von Kugeln“ (in den Göttinger Nachrichten von 1914) zuerkannt worden.

Invarianz und Umkehrung von Projektivitäten und Kollineationen.

(Mit 4 Figuren.)

Von Herrn *Stanislaus Jolles* in Berlin-Halensee.

Nach *v. Staudt* sind die Kollineationen, welche die Ecken eines Tetraeders invariant lassen, auch füreinander invariant. Sie werden durch die polaren Korrelationen, welche die Gegenelemente des Tetraeders miteinander vertauschen, in die zu ihnen inversen Kollineationen übergeführt. In der vorliegenden Arbeit werden beide Sätze auch für ein Tetraeder $A\,B\,C\,D$ als richtig erwiesen, dessen Ecken paarweise konjugiert imaginär sein können. Ein solcher Nachweis war meines Wissens bisher wohl versucht, aber einwurfsfrei nicht erbracht worden. Hierbei erweist es sich als vorteilhaft, zunächst die analogen Sätze für die Grundgebilde I. und II. Stufe zu ermitteln, um, gestützt auf sie, die Hauptsätze für die Grundgebilde III. Stufe darzutun. Die bei all diesen Untersuchungen benutzten Definitionen der Büschel von Punktinvolutionen, von projektiven Punktreihen und der zu ihnen dualen Gebilde sind durchweg unabhängig von der Realität der Basiselemente. Das gleiche gilt von den neuen Definitionen der Bündelheere kollinearer oder polarer Felder und der Gebüschverbände kollinearer oder polarer Räume. Insbesondere können Gebüschverbände kollinearer bzw. polarer Räume konstruiert werden, deren Inzidenztetraeder bzw. gemeinsame Polartetraeder konjugiert imaginäre Ecken haben. Bei der Konstruktion zweier kollinearen Räume, deren Decktetraeder auch konjugiert imaginäre Ecken haben kann, kommen wir auch zu den tetraedralen Strahlenkomplexen mit je einem nicht völlig reellen Haupttetraeder.

Dabei führt eine kurze Untersuchung des tetraedralen Strahlenkomplexes mit zwei Paaren konjugiert imaginärer Hauptpunkte zu einer *organischen* Konstruktion der kubischen Raumkurve aus drei Paaren ihrer konjugiert imaginären Punkte. Für die konstruktive Theorie der Büschel und Scharen polarer Räume ist die sich aus unseren Überlegungen ergebende einwandfreie Erzeugung des Gebüschverbandes polarer Räume von Nutzen. Beiläufig bemerke ich, daß die in der Arbeit befolgte Methode noch weitere Fortschritte in der rein geometrischen Behandlung imaginärer Elemente erwarten läßt.

1. Auf einem Kegelschnitte c^2 mögen die projektiven Punktreihen $A_1, B_1, C_1, \ldots$ und $A_2, B_2, C_2, \ldots$ liegen. Fallen dann die Punkte R_1, S_2 mit dem Punkte U, die Punkte S_1, T_2 mit dem Punkte V u. s. f. zusammen, so schneiden sich die Tangente in U und die Gerade $R_2 S_1$, die Tangente in V und die Gerade $S_2 T_1$ u. s. f. bzw. in den Punkten $U_p, V_p, \ldots$ einer Gerade, der Projektivitätsachse p der gegebenen beiden Punktreihen. Die Polaren von $U_p, V_p, \ldots$ gehen durch den Pol P von p für c^2, ferner schneidet die Polare von U_p den Kegelschnitt c^2 außer in U in dem von U durch die Punkte R_2, S_1 harmonisch getrennten Punkt U', die Polare von V_p außer in V in dem von V durch die Punkte S_2, T_1 harmonisch getrennten Punkt V' u. s. f. Also ist erwiesen:

*Entsprechen in den projektiven Punktreihen $A_1, B_1, C_1, \ldots$ und $A_2, B_2, C_2, \ldots$ auf dem Kegelschnitte c^2 einem Punkte $X \equiv M_1, N_2$ die Punkte M_2, N_1 und trennen die Punkte M_2, N_1 die Punkte X, X' harmonisch, so bilden die Punktepaare von X, X' eine Involution, sobald X den Kegelschnitt c^2 beschreibt. Die Projektivitätsachse p der beiden gegebenen Punktreihen ist die Achse, der Pol P von p für c^2 also das Zentrum der Involution. Die Doppelpunkte der Involution sind die Deckpunkte der projektiven Punktreihen, gleichgültig, ob diese Punkte reell oder konjugiert imaginär sind**).*

2. Die Projektivitätsachse p der auf dem Kegelschnitte c^2 gelegenen projektiven Punktreihen $A_1, B_1, C_1, \ldots$ und $A_2, B_2, C_2, \ldots$ kann zur Projektivitätsachse für ∞^1 projektive Punktreihen auf c^2 dienen. Je zwei — etwa

---

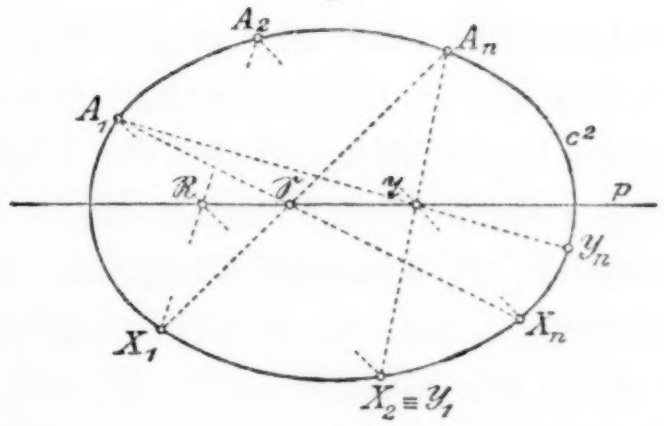
*) *v. Staudt*, Beiträge zur Geometrie der Lage, Nürnberg 1856, S. 99. Irrtümlich wird obiger Lehrsatz *Schröter* zugeschrieben. Er spricht ihn in seiner Arbeit „Untersuchung zusammenfallender reciproker Gebilde in der Ebene und im Raume", dieses Journal, Bd. 77, achtzehn Jahre später aus.

$A_1, B_1, C_1, \ldots$ und $A_n, B_n, C_n, \ldots$ — sind durch zwei homologe Elemente A_1, A_n bestimmt. Durch den Kegelschnitt c^2 und eine Gerade p sind somit ∞^1 projektive Punktreihen auf c^2 mit der Projektivitätsachse p definiert. Sie bilden einen „Büschel projektiver Punktreihen" auf c^2. Ein Büschel projektiver Punktreihen auf c^2 enthält zwei involutorisch projektive Punktreihen, er ist durch je zwei seiner Punktreihen bestimmt. Sobald p den Kegelschnitt c^2 schneidet, arten zwei projektive Punktreihen des Büschels aus. Die projektiven Punktreihen eines Büschels haben dieselben reellen oder konjugiert imaginären Deckpunkte. Sie heißen die „Grund- oder Basispunkte" des Büschels. Entsprechen in irgend zwei Punktreihen $A_1, B_1, C_1, \ldots$ und $A_n, B_n, C_n, \ldots$ des Büschels dem Punkte $X \equiv M_1, N_n$ die Punkte M_n, N_1 und trennen die Punkte X, X' die Punkte M_n, N_1 harmonisch, so sind stets X, X' ein Punktepaar der im Büschel enthaltenen Involution. Geht ein Büschel durch zwei projektive Punktreihen, so geht er auch durch zwei Punktreihen, die zu jenen invers projektiv sind.

3. *Die Projektivitäten zwischen den Punktreihen eines auf dem Kegelschnitte c^2 gelegenen Büschels projektiver Punktreihen sind füreinander invariant.*

Je zwei projektive Punktreihen des Büschels, z. B. $A_1, B_1, C_1, \ldots$ und $A_2, B_2, C_2, \ldots$ sowie $A_1, B_1, C_1, \ldots$ und $A_n, B_n, C_n, \ldots$, bestimmen näm-

Fig. 1



lich dieselbe Projektivitätsachse p (**1.**), folglich ist [Fig. 1] der Punkt $\mathfrak{R}$ als Schnitt von A_1X_2 und A_2X_1 und der Punkt $\mathfrak{S}$ als Schnitt von A_1X_n und A_nX_1 mit p inzident. Das c^2 einbeschriebene einfache Sechseck $X_2A_1X_nA_2X_1A_n$ hat also die Pascalgerade p. Auf p liegt somit der Schnittpunkt $\mathfrak{T}$ seiner Gegenseiten X_nA_2, A_nX_2. Die Gerade $A_1\mathfrak{T}$ schneidet c^2 noch im

Punkte Y_n, und zwar sind, da $A_1 Y_n$ und $A_n Y_1$ sich in dem Punkte $\mathfrak{T}$ von p treffen, $X_2 \equiv Y_1$ und Y_n homologe Punkte der projektiven Punktreihen $A_1, B_1, C_1, \ldots$ und $A_n, B_n, C_n, \ldots$. Da aber $A_2 X_n$ mit $\mathfrak{T}$ inzident ist, also X_n, Y_n auch homologe Punkte der projektiven Punktreihen $A_1, B_1, C_1, \ldots$ und $A_2, B_2, C_2, \ldots$ sind, so werden die homologen Punkte X_1, X_2 dieser projektiven Punktreihen durch die Projektivität zwischen den Punktreihen $A_1, B_1, C_1, \ldots$ und $A_n, B_n, C_n, \ldots$ wiederum in zwei homologe Punkte X_n, Y_n der nämlichen Punktreihen verwandelt, w. z. b. w.

Ebenso einfach folgt umgekehrt:

Drei projektive Punktreihen auf einem Kegelschnitte c^2 liegen im selben Büschel, wenn ihre Projektivitäten füreinander invariant sind.

Endlich gilt:

Alle projektiven Punktreihen auf einem Kegelschnitte c^2, deren Projektivitäten füreinander invariant sind, bilden einen Büschel).*

4. Werden die homologen Punkte zweier projektiven Punktreihen $A_1, B_1, C_1, \ldots$ und $A_2, B_2, C_2, \ldots$ auf einem Kegelschnitte c^2 mit einem Punkte P seiner Ebene durch Geraden verbunden, so schneiden die Geraden PA_1 und PA_2, PB_1 und $PB_2, \ldots, PX_1$ und PX_2, u. s. f. den Kegelschnitt wiederum in homologen Punkten zweier projektiven Punktreihen. Insbesondere entspricht dem auf PX_2 gelegenen Punkte Y_1 der Punktreihe $A_1, B_1, C_1 \ldots$ der auf PX_1 gelegene Punkt der zu ihr projektiven Punktreihe $A_2, B_2, C_2, \ldots$, wenn P ein Punkt der Projektivitätsachse p der gegebenen Punktreihen ist. Die gegebene Projektivität wird also umgekehrt durch die Projektivität jeder Punktinvolution auf c^2, deren Zentrum P auf der Projektivitätsachse p der Punktreihen liegt. Jeder Punkt der Projektivitätsachse p ist das Involutionszentrum einer solchen Punktinvolution auf c^2, oder:

*Sind X_1, X_2 und Y_1, Y_2 homologe Punkte der auf dem Kegelschnitte c^2 gelegenen projektiven Punktreihen $A_1, B_1, C_1, \ldots$ und $A_2, B_2, C_2, \ldots$, so kehrt die Projektivität der durch die Punktepaare X_1, Y_2 und X_2, Y_1 gehenden Involution die Projektivität zwischen den Punktreihen um**). Die (reellen oder*

---

*) *Pasch* hat in seiner Notiz „Beweis eines Satzes über projektive Punktreihen", dieses Journal, Bd. 91, S. 349 zuerst auf ∞^1 projektive Punktreihen hingewiesen, deren Projektivitäten für eine gegebene Projektivität invariant sind.

**) *Segre*, Note sur les homographies binaires et leurs faisceaux, dieses Journal, Bd. 100, S. 319.

konjugiert imaginären) Deckpunkte der projektiven Punktreihen bilden ein Punktepaar der Involution. Die Projektivität zwischen den Punktreihen $A_1, B_1, C_1, \ldots$ *und* $A_2, B_2, C_2, \ldots$ *wird durch* ∞^1 *involutorische Projektivitäten umgekehrt. — Jedes Punktepaar einer Involution bildet die Basispunkte eines Büschels projektiver Punktreihen, deren Projektivitäten durch die involutorische Projektivität umgekehrt werden.*

Unter den projektiven Punktreihen eines Büschels liegen zwei involutorisch (**2.**). Die Projektivität einer Involution ist mit der zu ihr inversen identisch, also läßt sich schließen:

Vertauscht auf einem Kegelschnitte c^2 *die Projektivität einer Punktinvolution* A^2 *zwei Punktepaare einer Involution* K^2 *miteinander, so sind die Projektivitäten beider Involutionen füreinander invariant.*

Ein Satz, dessen Umkehrung leicht zu erweisen ist.

Die Involutionszentren von K^2 und A^2 sind konjugiert für den Kegelschnitt c^2, somit gilt:

Von zwei Punktinvolutionen auf einem Kegelschnitte c^2, *deren Projektivitäten füreinander invariant sind, muß mindestens eine hyperbolisch sein**).

Nun sind die Projektivitäten der Involution K^2 und jeder Involution A^2, zu deren Involutionszentrum ein Punkt der Involutionsachse k von K^2 gewählt wird, füreinander invariant. Demnach ergibt sich:

Die auf einem Kegelschnitte c^2 *gelegene Punktinvolution* K^2 *ist für* ∞^1 *involutorische Projektivitäten invariant. Die zu ihnen gehörigen Involutionen* A^2 *haben ein Punktepaar gemein. Es besteht aus den (reellen oder konjugiert imaginären) Doppelpunkten von* K^2.

Die reellen einander zugeordneten Punkte einer hyperbolischen Involution K^2 sind je die Doppelpunkte der hyperbolischen Punktinvolutionen, die konjugiert imaginären je die Doppelpunkte der elliptischen Punktinvolutionen, die für die Projektivität von K^2 invariant sind. Die Doppelpunkte einer hyperbolischen Punktinvolution K^2 und je zwei einander zugeordnete Punkte bestimmen als Punktepaare jedesmal eine elliptische Punktinvolution A^2. Die Projektivitäten von K^2 und je einer Involution A^2 sind füreinander invariant.

---

*) *Segre*, a. a. O., S. 320.

5. Die ∞^1 Involutionen $\mathcal{A}^2$, die für die Projektivität einer Involution K^2 invariant sind, bilden auf dem Kegelschnitte c^2 „einen Büschel von Punktinvolutionen". Ein solcher Büschel ist durch zwei seiner Involutionen bestimmt. Alle Involutionen, welche ein (reelles oder konjugiert imaginäres) Punktepaar gemein haben, bilden einen Büschel. Je nachdem das Punktepaar reell oder konjugiert imaginär ist, heißt der Büschel „hyperbolisch" oder „elliptisch". Ein hyperbolischer Büschel enthält zwei parabolische Involutionen. Der hyperbolische Büschel wird zum „parabolischen", wenn seine beiden parabolischen Involutionen zusammenfallen. Die ∞^1 Involutionen, deren Projektivitäten die zweier projektiven Punktreihen $A_1, B_1, C_1, \ldots$ und $A_2, B_2, C_2, \ldots$ umkehren (**4.**), bilden einen Büschel von Involutionen. Das gemeinsame Punktepaar der Involutionen besteht aus den (reellen oder konjugiert imaginären) Deckpunkten der Punktreihen.

6. Durch die auf einem Kegelschnitte c^2 gelegene Punktinvolution K^2 geht ein Büschel projektiver Punktreihen (**2.**). Sind nun aber die Projektivität von K^2 und die einer Punktinvolution $\mathcal{A}^2$ von c^2 füreinander invariant, so ist das Involutionszentrum L von $\mathcal{A}^2$ ein Punkt der Involutionsachse k von K^2 (**4.**). Die Involutionsachse k ist aber zugleich die Projektivitätsachse je zweier projektiven Punktreihen des durch K^2 gehenden Büschels, z. B. der Punktreihen $A_1, B_1, C_1, \ldots$ und $A_2, B_2, C_2, \ldots$. Also treffen die Strahlen von L nach je zwei homologen Punkten X_1, X_2 dieser projektiven Punktreihen den Kegelschnitt c^2 noch in je zwei homologen Punkten zweier projektiven Punktreihen, deren Projektivität invers ist zu derjenigen der beiden Punktreihen $A_1, B_1, C_1, \ldots$ und $A_2, B_2, C_2, \ldots$. Folglich gilt:

Sind in zwei Büscheln projektiver Punktreihen auf einem Kegelschnitte c^2 Involutionen enthalten, deren Projektivitäten füreinander invariant sind, so werden die Projektivitäten zwischen den Punktreihen des einen Büschels durch die Projektivität der Involution im andern Büschel umgekehrt.

7. Liegen auf einem Kegelschnitte c^2 die Punktinvolutionen $A_0 A_m, B_0 B_m, \ldots$ und $A_0 A_n, B_0 B_n, \ldots$, so hat erstere zum Involutionszentrum den Schnittpunkt M der Geraden $A_0 A_m, B_0 B_m$ und letztere den Schnittpunkt N der Geraden $A_0 A_n, B_0 B_n$. Das c^2 einbeschriebene einfache Sechseck $A_m A_0 A_n B_m B_0 B_n$ hat nun die Verbindungsgerade p der Zentren

M und N zur Pascalgerade, und p bleibt Pascalgerade des Sechsecks, wenn auch der Punkt B_0 und die ihm durch die Involutionen zugeordneten Punkte B_m und B_n den Kegelschnitt durchlaufen. Da hierbei die Geraden $A_n B_m$ und $B_n A_m$ sich stets auf p schneiden, so ist p auch die Projektivitätsachse der auf c^2 gelegenen projektiven Punktreihen $A_m, B_m, C_m, \ldots$ und $A_n, B_n, C_n, \ldots$. Daraus folgt nach **4.** zunächst:

Erzeugt auf einem Kegelschnitte c^2 eine Punktreihe $A_0, B_0, C_0, \ldots$ mit zwei zu ihr projektiven Punktreihen $A_m, B_m, C_m, \ldots$ und $A_n, B_n, C_n, \ldots$ je eine Involution, so kehrt jede der beiden involutorischen Projektivitäten die Projektivität zwischen den Punktreihen $A_m, B_m, C_m, \ldots$ und $A_n, B_n, C_n, \ldots$ um.

Alle projektiven Punktreihen auf dem Kegelschnitte c^2, deren Projektivitätsachse die Verbindungsgerade der Involutionszentren M, N ist, bilden nun einen durch die projektiven Punktreihen $A_m, B_m, C_m, \ldots$ und $A_n, B_n, C_n, \ldots$ gehenden Büschel (**2.**). Die Projektivitäten zwischen seinen Punktreihen sind bestimmt, sobald wir dem Punkte A_m nacheinander die übrigen Punkte $A_n, \ldots, A_x, \ldots$ von c^2 entsprechen lassen. Sind $A_m, B_m, C_m, \ldots$ und $A_x, B_x, C_x, \ldots$ irgend zwei projektive Punktreihen des Büschels, so schneiden sich die Geraden $A_m B_x$ und $A_x B_m$ auf p. Ferner schneiden sich im Punkte M von p die Geraden $A_m A_0, B_m B_0$. Folglich ist p die Pascalgerade des c^2 einbeschriebenen einfachen Sechsecks $A_m A_0 A_x B_m B_0 B_x$, und die Geraden $A_0 A_x$ und $B_0 B_x$ treffen sich in einem Punkte O auf p. Fallen B_m und B_x nacheinander mit den homologen Punkten C_m, C_x; D_m, D_x; ... der projektiven Punktreihen $A_m, B_m, C_m, \ldots$ und $A_x, B_x, C_x, \ldots$ zusammen, so beschreibt der Schnittpunkt der Geraden $A_m B_x$ und $A_x B_m$ die Gerade p und die Gerade $B_m B_0$ den Strahlenbüschel M. Die Gerade p bleibt also die Pascalgerade des einfachen Sechsecks $A_m A_0 A_x B_m B_0 B_x$, und die Gerade $B_0 B_x$ dreht sich folglich um den Punkt O. Die projektiven Punktreihen $A_0, B_0, C_0, \ldots$ und $A_x, B_x, C_x, \ldots$ liegen somit involutorisch. D. h., es ist dargetan:

Eine Punktreihe auf einem Kegelschnitte c^2, die mit zwei zu ihr projektiven Punktreihen involutorisch liegt, liegt involutorisch zu allen Punktreihen des durch die zwei projektiven Punktreihen gehenden Büschels und erzeugt mit ihnen die Involutionen eines Büschels. Die Projektivitäten der erzeugten Involutionen kehren die Projektivitäten zwischen den Punktreihen des Büschels projektiver Punktreihen um (**5.**).

8. Die in den vorstehenden Nummern abgeleiteten Sätze über Büschel projektiver Punktreihen und Büschel von Punktinvolutionen auf einem Kegelschnitte c^2 lassen sich auf die analogen Gebilde in den anderen Elementargebilden I. und II. Ordnung übertragen.

Sind insbesondere M, N, X drei Punkte eines Kegelschnittes c^2 und X_M, X_N die Schnittpunkte von MX und NX mit einer Gerade g, so sind den Punkten X_M und X_N in der von c^2 auf g hervorgerufenen Involution konjugierter Punkte bzw. die Punkte X'_M und X'_N zugeordnet Die Geraden MX'_M und NX'_N schneiden c^2 noch in einem Punkte Y bzw. Z. Da aber MX_M, MX'_M und NX_N, NX'_N je zwei für c^2 konjugierte Punkte projizieren, also der Pol G von g für c^2 sowohl auf XY wie auf XZ liegt*), fällt Z mit Y zusammen. X_M und X_N beschreiben demnach, wenn X den Kegelschnitt c^2 durchläuft, auf g projektive Punktreihen, zu deren homologen Punkten auch X'_M und X'_N gehören. Kurz:

Eine Gerade g schneidet die zu einem Kegelschnitte c^2 perspektiven Strahlenbüschel I. Ordnung in projektiven Punktreihen, die durch die Projektivität der von c^2 auf g hervorgerufenen Involution konjugierter Punkte in sich selbst übergeführt werden. Diese projektiven Punktreihen bilden also einen Büschel (**3.**).

9. Soll ein Dreieck HIK das Deckdreieck zweier kollinearen Felder $\sigma_1(A_1, a_1, \ldots)$ und $\sigma_2(A_2, a_2, \ldots)$ sein, so sind die kollinearen Felder bestimmt, sobald noch zwei Punkte oder Strahlen ihrer Ebene σ einander zugeordnet werden, die mit keinem Deckelemente inzident sind. Wir wollen diesen Satz im folgenden auch unter der Voraussetzung beweisen, daß zwei Ecken des Dreiecks — etwa I, K und folglich auch die ihnen bzw. gegenüberliegenden Dreieckseiten i, k — konjugiert imaginär sein können. Die Deckpunkte I, K sollen demnach auf der H gegenüberliegenden Seite h die Doppelelemente einer Punktinvolution $h(AA', BB', \ldots)$ sein, die Deckstrahlen i, k die Doppelelemente der zu ihr perspektiven Strahleninvolution $H(aa', bb', \ldots)$, gleichgültig, ob diese Involutionen hyperbolisch oder elliptisch sind.

Sind zunächst zur Bestimmung von σ_1 und σ_2 die durch die Involutionen $h(AA', BB', \ldots)$ und $H(aa', bb', \ldots)$ definierten Deckelemente

---

*) *v. Staudt*, Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, S. 141.

und die homologen Punkte P_1, P_2 gegeben, so enthält der durch die Strahleninvolution $H(aa', bb', \ldots)$ gehende Büschel projektiver Strahlenbüschel zwei Büschel $H(p_1^H, \ldots)$ und $H(p_2^H, \ldots)$, in denen die P_1, P_2 aus H projizierenden Strahlen p_1^H und p_2^H einander entsprechen (**2.**). Diese projektiven Strahlenbüschel müssen homologe Gebilde von σ_1 und σ_2 sein, ebenso die bzw. zu ihnen perspektiven Punktreihen $h(P_1^h, \ldots)$ und $h(P_2^h, \ldots)$ auf h und endlich die zu diesen Punktreihen bzw. perspektiven Strahlenbüschel $P_1(p_1, \ldots)$ und $P_2(p_2, \ldots)$. In ihnen fällt p_1 mit p_1^H und p_2 mit p_2^H zusammen. Den Strahlenbüscheln $H(p_1^H, \ldots)$ und $P_1(p_1, \ldots)$ von σ_1 entsprechen nunmehr die Strahlenbüschel $H(p_2^H, \ldots)$ und $P_2(p_2, \ldots)$ von σ_2 und dem gemeinsamen Strahle $p_1^H \equiv p_1$ der ersteren Büschel der gemeinsame Strahl $p_2^H \equiv p_2$ der letzteren. Hierdurch ist aber die Kollineation der Felder σ_1 und σ_2 festgelegt*), die dem Punkte P_1 den Punkt P_2 zuweist und das Dreieck HIK in Ruhe läßt, gleichgültig ob die Ecken I und K reell oder konjugiert imaginär sind.

Fällt P_2 nacheinander mit allen Punkten der Ebene σ zusammen, so ergeben sich ∞^2 Felder mit dem Deckdreiecke HIK. Durch je zwei von ihnen geht eine Schar solcher kollinearen Felder. Die kollinearen Felder mit demselben Deckdreiecke bilden also ein Heer (eine Scharschar).

Wären andrerseits außer den Involutionen $h(AA', BB', \ldots)$ und $H(aa', bb', \ldots)$ zur Bestimmung von σ_1 und σ_2 die homologen Strahlen p_1, p_2 bekannt, so würden, wenn p_2 nacheinander mit allen Strahlen der Ebene σ zusammenfällt, die ∞^2 kollinearen Felder mit dem Deckdreiecke HIK sich als ein Bündel kollinearer Felder erweisen. Diese ∞^2 kollinearen Felder mit demselben Deckdreiecke HIK, gleichgültig ob die Ecken I und K reell oder konjugiert imaginär sind, bilden also sowohl einen Bündel wie auch ein Heer oder kurz ein „Bündelheer" kollinearer Felder.

Berücksichtigt man, daß die Kollineation zwischen den Feldern σ_1 und σ_2 die Involutionen $h(AA', BB', \ldots)$ und $H(aa', bb', \ldots)$, welche die Deckelemente bestimmen, in sich selbst überführt (**3.**), so kann das Gesamtergebnis folgendermaßen zusammengefaßt werden:

In einer Ebene gibt es nur eine Kollineation, für die eine gegebene Punktinvolution $h(AA', BB', \ldots)$ und eine zu ihr perspektive Strahleninvolution

*) *v. Staudt*, Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, S. 64.

$H(aa', bb', \ldots)$ invariant bleiben, und die außerdem zwei gegebene Punkte oder Strahlen einander entsprechen läßt. Alle kollinearen Felder der Ebene, deren Kollineationen die gegebenen Involutionen invariant lassen, bilden ein Bündelheer. Zwei gegebene kollineare Felder einer Ebene werden durch ein und nur ein Bündelheer verbunden.

10. $\sigma_1(A_1, a_1, \ldots)$ und $\sigma_2(A_2, a_2, \ldots)$ seien zwei kollineare Felder mit dem Deckdreiecke HIK, von dem nur der Deckpunkt H und der ihm gegenüberliegende Deckstrahl h reell zu sein brauchen. Zwei gegebene homologe Strahlenbüschel P_1, P_2 von σ_1 und σ_2 erzeugen dann einen Kegelschnitt p^2. Die homologen Strahlenbüschel P_1 und P_2 sind bzw. perspektiv zu den homologen Punktreihen $h(P_1^h, \ldots)$ und $h(P_2^h, \ldots)$ auf dem Deckstrahle h, folglich schneidet p^2 den Deckstrahl in den (reellen oder konjugiert imaginären) Deckpunkten I, K (**9.**). Da p^2 auch den Deckpunkt H enthält, so wird der Kegelschnitt aus H durch einen zu den erzeugenden Strahlenbüscheln P_1 und P_2 projektiven Strahlenbüschel $H(p_{12}, \ldots)$ projiziert. h schneidet diesen Strahlenbüschel also in einer zu den homologen Punktreihen $h(P_1^h, \ldots)$ und $h(P_2^h, \ldots)$ projektiven Punktreihe, die in dem durch die homologen Punktreihen gehenden Büschel projektiver Punktreihen liegt (**8.**).

Der Kegelschnitt p^2 zerfällt in den Deckstrahl h und den Strahl x_{12} von H, sobald die homologen Punkte P_1 und P_2 mit den homologen Punkten P_1^h und P_2^h auf h zusammenfallen. Jedem Paare homologer Punkte X_1^h und X_2^h auf h ist folglich je ein Strahl x_{12} in H zugeordnet, der Ort der Schnittpunkte aller homologen Strahlen von X_1^h und X_2^h. Er möge als die zu den homologen Punkten X_1^h und X_2^h gehörige „Perspektivitätsachse“ bezeichnet werden. Aus dem soeben Bewiesenen ergibt sich somit:

Die Perspektivitätsachsen x_{12}, die zu allen Paaren homologer Punkte X_1^h und X_2^h eines Deckstrahles h der kollokalen kollinearen Felder σ_1 und σ_2 gehören, bilden einen zu den homologen Punktreihen in h projektiven Strahlenbüschel in dem h gegenüberliegenden Deckpunkte H. Je zwei homologe Punkte X_1^h und X_2^h und der Schnittpunkt X_{12}^h von h mit der zu X_1^h und X_2^h gehörigen Perspektivitätsachse x_{12} sind einander entsprechende Punkte dreier projektiven Punktreihen eines Büschels. Seine Grundpunkte sind die mit h inzidenten (reellen oder konjugiert imaginären) Deckpunkte I und K der kollinearen Felder.

Alle Verbindungsstrahlen homologer Punkte von σ_1 und σ_2 auf je zwei homologen Strahlen x_1^H und x_2^H des Deckpunktes H sind inzident mit je einem Punkte X_{12} auf h. Er heiße das zu den homologen Strahlen x_1^H und x_2^H gehörige „Perspektivitätszentrum". Dann folgt aus Überlegungen, die denen für die Perspektivitätsachsen x_{12} dual nachzubilden sind:

Die Perspektivitätszentren X_{12}, die zu allen Paaren homologer Strahlen x_1^H und x_2^H eines Deckpunktes H der kollokalen kollinearen Felder σ_1 und σ_2 gehören, bilden eine zu den homologen Strahlenbüscheln in H projektive Punktreihe auf dem H gegenüberliegenden Deckstrahle h. Je zwei homologe Strahlen x_1^H und x_2^H und die Verbindungsgerade x_{12}^H von H mit dem zu x_1^H und x_2^H gehörigen Perspektivitätszentrum X_{12} sind einander entsprechende Strahlen dreier projektiven Strahlenbüschel eines Büschels. Seine Grundstrahlen sind die mit H inzidenten (reellen oder konjugiert imaginären) Deckstrahlen i und k der kollinearen Felder.

Die homologen Punktreihen $h(X_1^h, \ldots)$ und $h(X_2^h, \ldots)$ auf dem Deckstrahle h sind nun perspektiv zu den homologen Strahlenbüscheln $H(x_1^H, \ldots)$ und $H(x_2^H, \ldots)$ im Deckpunkte H, somit schließen wir aus den beiden letzten Sätzen:

Der Strahlenbüschel $H(x_{12}, \ldots)$ der Perspektivitätsachsen x_{12} ist projektiv zur Punktreihe $h(X_{12}, \ldots)$ der Perspektivitätszentren X_{12}. Die Punktreihe $h(X_{12}, \ldots)$ und die zu ihr projektive Punktreihe $h(X_{12}^h, \ldots)$, in welcher der Deckstrahl h den Strahlenbüschel $H(x_{12}, \ldots)$ schneidet, liegen mit den homologen Punktreihen $h(X_1^h, \ldots)$ und $h(X_2^h, \ldots)$ von σ_1 und σ_2 auf h im nämlichen Büschel.

Zwei homologe Punktreihen von σ_1 und σ_2, deren Träger p_1, p_2 bzw. mit den homologen Punkten P_1^H und P_2^H auf dem Deckstrahle h inzident sind, erzeugen einen durch h gehenden Strahlenkegelschnitt π^2, sein Berührungspunkt auf h ist das zu den homologen Strahlen p_1^H und p_2^H des Deckpunktes H gehörige Perspektivitätszentrum P_{12}. Zwei homologe Strahlenbüschel von σ_1 und σ_2, deren Mittelpunkte P_1, P_2 bzw. mit den homologen Strahlen p_1^H und p_2^H des Deckpunktes H inzident sind, erzeugen einen durch H gehenden Punktkegelschnitt p^2, seine Tangente in H ist die zu den homologen Punkten P_1^h und P_2^h des Deckstrahles h gehörige Perspektivitätsachse p_{12}.

Die Kollineation der Felder σ_1 und σ_2 ist übrigens bestimmt, sobald

außer dem Deckpunkte H und dem ihm gegenüberliegenden Deckstrahle h entweder die homologen Strahlenbüschel in H und das zu zwei ihrer homologen Strahlen gehörige Perspektivitätszentrum gegeben sind, oder die homologen Punktreihen auf h und die zu zwei ihrer homologen Punkte gehörige Perspektivitätsachse.

11. In einer Ebene seien drei kollineare Felder $\sigma_1(A_1, a_1, \ldots)$, $\sigma_2(A_2, a_2, \ldots)$ und $\sigma_3(A_3, a_3, \ldots)$ gegeben, deren Kollineationen die Punktinvolution $h(AA', BB', \ldots)$ und die zu ihr perspektive Strahleninvolution $H(aa', bb', \ldots)$ invariant lassen. Dann ist h ein Deckstrahl sowie H der ihm gegenüberliegende Deckpunkt der kollinearen Felder, und durch die homologen Punktreihen $h(P_1^h, Q_1^h, \ldots)$, $h(P_2^h, Q_2^h, \ldots)$ und $h(P_3^h, Q_3^h, \ldots)$ von σ_1, σ_2 und σ_3 auf h geht derselbe Büschel projektiver Punktreihen (**9.**). Er geht ferner durch die Punktreihe $h(P_{12}^h, Q_{12}^h, \ldots)$, in der h den Strahlenbüschel $H(p_{12}, q_{12}, \ldots)$ der Perspektivitätsachsen schneidet, die zu den homologen Punkten $P_1^h, P_2^h; Q_1^h, Q_2^h; \ldots$ von σ_1 und σ_2 auf h gehören (**10.**). Die Projektivitäten zwischen den Punktreihen eines Büschels sind nun füreinander invariant (**3.**); folglich werden durch die Kollineation von σ_1 und σ_3 irgend drei homologe Elemente X_1^h, X_2^h und X_{12}^h der projektiven Punktreihen $h(P_1^h, \ldots), h(P_2^h, \ldots)$ und $h(P_{12}^h, \ldots)$ in drei andere homologe Elemente Y_1^h, Y_2^h und Y_{12}^h derselben Punktreihen transformiert. Hieraus ergibt sich unmittelbar, daß die Kollineation von σ_1 und σ_3 die homologen Elemente X_1^h, X_2^h von σ_1 und σ_2 und die zugehörige Perspektivitätsachse x_{12} in die homologen Elemente Y_1^h, Y_2^h der nämlichen kollinearen Felder und die zugehörige Perspektivitätsachse y_{12} überführt. Je zwei homologe bzw. mit X_1^h und X_2^h inzidente Strahlen von σ_1 und σ_2 werden somit durch die Kollineation von σ_1 und σ_3 in zwei andere homologe bzw. mit Y_1^h und Y_2^h inzidente Strahlen verwandelt. D. h.:

Kollineationen in einer Ebene, die eine Punktinvolution $h(AA', BB', \ldots)$ und eine zu ihr perspektive Strahleninvolution $H(aa', bb', \ldots)$ invariant lassen, sind füreinander invariant. Alle kollinearen Felder einer Ebene, deren Kollineationen füreinander invariant bleiben, bilden ein Bündelheer (**9.**). *Ihr gemeinsames Deckdreieck kann reell sein oder auch zwei konjugiert imaginäre Ecken haben.*

Geht ein Bündelheer durch zwei kollineare Felder σ_1 und σ_2, so geht es auch durch zwei Felder, deren Kollineation invers zu der jener Felder ist.

12. In den kollinearen Feldern $\sigma_1(A_1, a_1, \ldots)$, $\sigma_2(A_2, a_2, \ldots), \ldots, \sigma_n(A_n, a_n, \ldots), \ldots$ einer Schar mögen in einem Deckpunkte H die Strahlen $x_1^H, x_2^H, \ldots, x_n^H, \ldots$ einander entsprechen. Nun bilden die Punkte $P_2, \ldots, P_n, \ldots$, die in $\sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ einem gegebenen mit x_1^H inzidenten Punkte P_1 entsprechen, mit P_1 eine zum Strahlenbüschel $H(x_1^H, x_2^H, \ldots, x_n^H, \ldots)$ perspektive Punktreihe $p(P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots)$. Somit fällt sowohl das zu den homologen Strahlen x_1^H und x_2^H von σ_1 und σ_2 gehörige Perspektivitätszentrum X_{12} wie das zu den homologen Strahlen x_1^H und x_3^H von σ_1 und σ_3 gehörige Perspektivitätszentrum X_{13} u. s. f. mit dem Schnittpunkte hp zusammen, und es gilt:

Das zu einem Paare homologer Strahlen x_1^H, x_n^H zweier kollinearen Felder σ_1, σ_n in einem Deckpunkte H gehörige Perspektivitätszentrum X_{1n} ändert sich nicht, wenn σ_n nacheinander mit allen übrigen Feldern der σ_1, σ_n verbindenden Schar zusammenfällt.

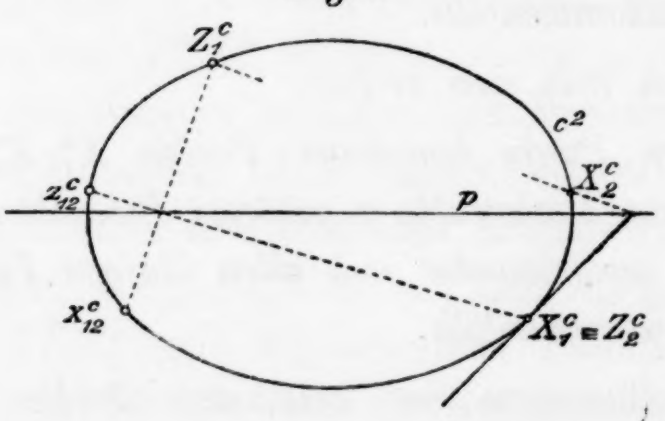
Ebenso einfach läßt sich zeigen:

Die zu einem Paare homologer Punkte X_1^h, X_n^h zweier kollinearen Felder τ_1, τ_n auf einem Deckstrahle h gehörige Perspektivitätsachse x_{1n} ändert sich nicht, wenn τ_n nacheinander mit allen übrigen Feldern des τ_1, τ_n verbindenden Büschels zusammenfällt.

13. Die Kollineation der kollokalen Felder $\sigma_1(A_1, a_1, \ldots)$ und $\sigma_2(A_2, a_2, \ldots)$ ist bestimmt, sobald außer einem Deckstrahle h und dem ihm gegenüberliegenden Deckpunkte H gegeben sind die homologen Punktreihen $h(X_1^h, \ldots)$ und $h(X_2^h, \ldots)$ von σ_1 und σ_2 auf h und die zu den zwei homologen Punkten X_1^h und X_2^h gehörige Perspektivitätsachse x_{12} (**10.**). Der Deckstrahl h schneidet den Büschel $H(x_{12}, \ldots)$ der zu den homologen Punkten von $h(X_1^h, \ldots)$ und $h(X_2^h, \ldots)$ gehörigen Perspektivitätsachsen in einer zu den zwei Punktreihen projektiven Punktreihe $h(X_{12}^h, \ldots)$, und alle drei projektiven Punktreihen liegen im nämlichen Büschel (**10.**). Folglich kann, da die drei homologen Punkte X_1^h, X_2^h und X_{12}^h der Punktreihen bekannt sind, die zu irgend zwei homologen Punkten Y_1^h und Y_2^h der kollinearen Felder σ_1 und σ_2 auf dem Deckstrahle h gehörige Perspektivitätsachse y_{12} sehr einfach und anschaulich vermittelst eines durch H gelegten Hilfskegelschnittes c^2 konstruiert werden (**2.**). Wir projizieren hierzu von H aus die Punktreihen $h(X_1^h, \ldots)$ und $h(X_2^h, \ldots)$ bzw. in die Punktreihen

$c^2(X_1^c, \ldots)$ und $c^2(X_2^c, \ldots)$ des Kegelschnittes c^2 und schneiden den Strahlenbüschel $H(x_{12}, \ldots)$ durch c^2 in der Punktreihe $c^2(x_{12}^c, \ldots)$. Dann weist der Kegelschnitt je zwei dieser in einem Büschel gelegenen projektiven Punktreihen die nämliche Projektivitätsachse p zu. Die projektiven Beziehungen zwischen den drei Punktreihen sind festgelegt durch die Projektivitätsachse p und die drei homologen Punkte X_1^c, X_2^c und x_{12}^c. Schneidet die Gerade $X_2^c Y_1^c$ die Projektivitätsachse p in $\mathfrak{S}$, so trifft die Gerade $X_1^c \mathfrak{S}$ den Kegelschnitt c^2 noch in Y_2^c, und schneidet die Gerade $x_{12}^c Y_1^c$ die Projektivitätsachse p in $\mathfrak{T}$, so trifft die Gerade $X_1^c \mathfrak{T}$ den Kegelschnitt c^2 noch im Punkte y_{12}^c. Der y_{12}^c aus H projizierende Strahl ist die gesuchte zu den homologen Punkten Y_1^h und Y_2^h von σ_1 und σ_2 gehörige Perspektivitätsachse y_{12}.

Fig. 2



Ist insbesondere Z_2^c das mit X_1^c zusammenfallende Element der Punktreihe $c^2(X_2^c, \ldots)$, so liefert die angegebene Konstruktion z_{12}^c und x_{12}^c als einander entsprechende Punkte [Fig. 2] der projektiven Punktreihen $c^2(X_1^c, \ldots)$ und $c^2(X_2^c, \ldots)$, und die zu den homologen Punkten Z_1^h, Z_2^h und X_1^h, X_2^h von σ_1 und σ_2 gehörigen Perspektivitätsachsen z_{12} und x_{12} als homologe Strahlen von σ_1 und σ_2 in H.

Das durch die kollinearen Felder σ_1 und σ_2 gehende Bündelheer enthält ein Paar Felder σ_1 und σ_3, zwischen denen die zu der Kollineation von σ_1 und σ_2 inverse Kollineation besteht (**11.**). In ihnen ist, wenn Z_1^h mit X_3^h bezeichnet wird, X_1^h und X_3^h ein Paar homologer Punkte des Deckstrahles h, die Gerade z_{12} die zu den homologen Punkten X_1^h und X_3^h gehörige Perspektivitätsachse x_{13}, und x_{12} und x_{13} ein Paar homologer Strahlen des Deckpunktes H. Ebenso entspricht in σ_1 und σ_3 dem Perspektivitäts-

zentrum X_{12} der homologen Strahlen x_1^h und x_2^h von σ_1 und σ_2 das Perspektivitätszentrum X_{13} der homologen Strahlen x_1^h und x_3^h von σ_1 und σ_3. D. h.:

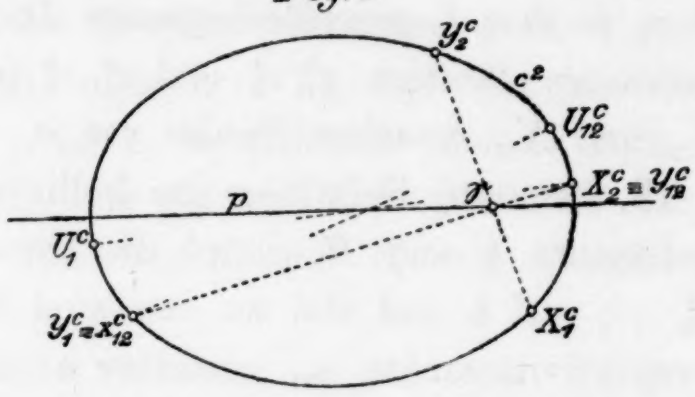
Sind in einem Bündelheere kollinearer Felder die Kollineationen zwischen den Feldern σ_1, σ_2 und σ_1, σ_3 zueinander invers, so sind die zu den homologen Punkten X_1^h und X_2^h und X_1^h und X_3^h auf dem Deckstrahle h bzw. in jenen Feldern gehörigen Perspektivitätsachsen x_{12} und x_{13} homologe Strahlen von σ_1 und σ_3 in dem h gegenüberliegenden Deckpunkte H. Analog sind die zu den homologen Strahlen x_1^h, x_2^h und x_1^h, x_3^h in H gehörigen Perspektivitätszentren X_{12} und X_{13} homologe Punkte von σ_1 und σ_3 auf h.

14. Die in **13.** benutzte Definition der kollinearen Felder σ_1 und σ_2 durch die Deckelemente h und H, durch die homologen Punktreihen $h(X_1^h, \ldots)$ und $h(X_2^h, \ldots)$ auf h und die zu den zwei homologen Punkten X_1^h, X_2^h gehörige Perspektivitätsachse x_{12} gestattet auch das zu zwei gegebenen homologen Strahlen von H gehörige Perspektivitätszentrum einfach und anschaulich zu ermitteln. Entspricht nämlich der als y_1^H zu σ_1 gerechneten Perspektivitätsachse x_{12} in σ_2 der Strahl y_2^H, so entspricht in σ_2 dem mit y_1^H inzidenten Schnittpunkte S_1 zweier homologen Strahlen s_1 und s_2 von X_1^h und X_2^h der Schnittpunkt S_2 von s_2 mit y_2^H. Dreht sich s_1 um X_1^h, so dreht sich s_2 um X_2^h, während S_1 und S_2 die Strahlen y_1^H und y_2^H durchlaufen. *X_2^h wird somit das zu den homologen Strahlen y_1^H und y_2^H von σ_1 und σ_2 in H gehörige Perspektivitätszentrum Y_{12}, sobald der Strahl y_1^H mit der Perspektivitätsachse x_{12} der homologen Punkte X_1^h und X_2^h von σ_1 und σ_2 auf h zusammenfällt.* Nun ist die Punktreihe $h(X_{12}, \ldots)$ der zu je zwei homologen Strahlen von σ_1 und σ_2 in H gehörigen Perspektivitätszentren projektiv zu den homologen Strahlenbüscheln $H(x_1^H, \ldots)$ und $H(x_2^H, \ldots)$ von σ_1 und σ_2 in H. Ferner liegen der die Punktreihe aus H projizierende Strahlenbüschel und die zu ihm projektiven homologen Strahlenbüschel $H(x_1^H, \ldots)$ und $H(x_2^H, \ldots)$ im nämlichen Büschel projektiver Strahlenbüschel (**10.**). Folglich benutzen wir den in **13.** durch H gelegten Hilfskegelschnitt c^2, um nunmehr aus diesen projektiven Beziehungen sowie aus den zwei homologen Strahlen y_1^H, y_2^H und dem zugehörigen Perspektivitätszentrum Y_{12} das zu irgend zwei homologen Strahlen u_1^H, u_2^H von σ_1 und σ_2 in H gehörige Perspektivitätszentrum U_{12} zu ermitteln.

Der Kegelschnitt c^2 schneidet die projektiven Strahlenbüschel $H(x_1^H, \ldots)$, $H(x_2^H, \ldots)$ und $H(x_{12}, \ldots)$ wiederum in den zu ihnen perspektiven

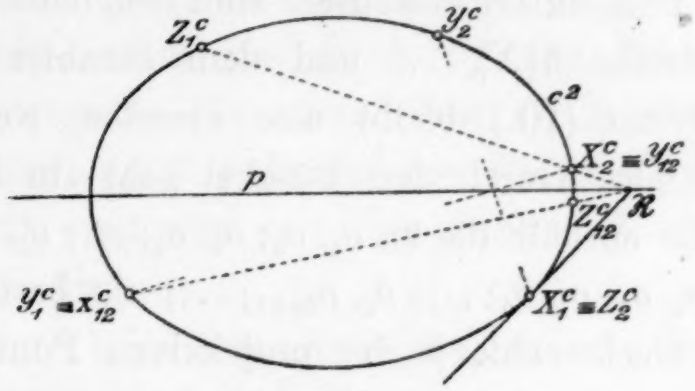
Punktreihen $c^2(X_1^c, \ldots)$, $c^2(X_2^c, \ldots)$ und $c^2(x_{12}^c, \ldots)$. Je zwei dieser Punktreihen eines Büschels weist c^2 die nämliche Projektivitätsachse p zu (**2.**). Die Projektivitäten zwischen den drei Punktreihen sind bestimmt durch die Projektivitätsachse p und die einander entsprechenden Punkte X_1^c, X_2^c und x_{12}^c.

Fig. 3



Gemäß obiger Auseinandersetzung suchen wir nunmehr die Punkte Y_1^c, Y_2^c und den Punkt Y_{12}^c auf, in den sich aus H das Perspektivitätszentrum der homologen Strahlen y_1^H und y_2^H auf c^2 projiziert [Fig. 3]. Der Punkt Y_1^c fällt nach ihr mit dem Punkte x_{12}^c zusammen, die Gerade $X_2^c x_{12}^c$ schneidet folglich die Projektivitätsachse p in einem Punkte $\mathfrak{S}$, dessen Verbindungsstrahl mit X_1^c den Kegelschnitt nochmals in Y_2^c trifft. Der Punkt Y_{12}^c ist, wie ebenfalls daselbst nachgewiesen wurde, identisch mit dem Punkte X_2^c. Da die Punktreihen $c^2(X_1^c, \ldots, Y_1^c, \ldots)$, $c^2(X_2^c, \ldots, Y_2^c, \ldots)$ und $c^2(X_{12}^c, \ldots, Y_{12}^c, \ldots)$ im selben Büschel liegen (**10.**), so weist c^2 je zweien von ihnen auch die Projektivitätsachse p zu. Ihre Projektivitäten sind festgelegt durch die drei einander entsprechenden Punkte Y_1^c, Y_2^c und Y_{12}^c und durch die Projektivitätsachse p. — Sind jetzt u_1^H und u_2^H irgend zwei homologe Strahlen von H in σ_1 und σ_2 und ermittelt man auf c^2 mit Hilfe der Projektivitätsachse p und der einander entsprechenden Punkte Y_1^c und Y_{12}^c zum Punkte U_1^c den ihm entsprechenden Punkt U_{12}^c [Fig. 3], so ist die Projektion von U_{12}^c vom Deckpunkte H aus auf den Deckstrahl h das Perspektivitätszentrum U_{12} der homologen Strahlen u_1^H und u_{12}^H von H. Insbesondere ergibt sich der X_1^c entsprechende Punkt X_{12}^c, indem man den Schnittpunkt der Geraden p und $Y_{12}^c X_1^c$ von Y_1^c auf c^2 projiziert. Aus ihm folgt das zu den homologen Strahlen x_1^H und x_2^H gehörige Perspektivitätszentrum X_{12} als der Schnittpunkt des Strahles $H X_{12}^c$ mit h.

Fig. 4



Fällt endlich der Punkt Z_2^c mit X_1^c zusammen [Fig. 4], so schneidet die Tangente in X_1^c an den Kegelschnitt c^2 die Projektivitätsachse p in einem Punkte $\Re$, den man mit X_2^c durch eine Gerade verbinden muß, um auf c^2 den Z_2^c entsprechenden Punkt Z_1^c zu erhalten. Nun ist der Punkt X_2^c mit dem Punkte Y_{12}^c identisch, und die Gerade p auch die Projektivitätsachse der projektiven Punktreihen $c^2(X_{12}^c, \ldots, Y_{12}^c, \ldots)$ und $c^2(X_1^c, \ldots, Y_1^c, \ldots)$, folglich schneidet die Verbindungsgerade $\Re Y_1^c$ den Kegelschnitt noch in dem Punkte Z_{12}^c. Da aber x_{12}^c mit Y_1^c zusammenfällt, ergeben sich sonach Z_{12}^c und X_1^c als einander entsprechende Punkte der projektiven Punktreihen $c^2(X_1^c, \ldots)$ und $c^2(x_{12}^c, \ldots)$.

In den zu σ_1, σ_2 invers kollinearen Feldern σ_1, σ_3 fallen die homologen Strahlen z_2^H und z_1^H von σ_2 und σ_1 bzw. mit den homologen Strahlen x_1^H und x_3^H von σ_1 und σ_3 zusammen. Der Schnittpunkt Z_{12} der Gerade $H Z_{12}^c$ mit dem Deckstrahle h ist somit das zu den homologen Strahlen x_1^H und x_3^H von σ_1 und σ_3 in H gehörige Perspektivitätszentrum X_{13}, und es ergibt sich:

Sind in einem Bündelheere kollinearer Felder h und H gegenüberliegende Deckelemente der Felder und sind die Kollineationen der Felder σ_1, σ_2 und σ_1, σ_3 invers zueinander, so sind auch invers zueinander die Projektivität zwischen der Punktreihe $h(X_1^h, \ldots)$ und dem Strahlenbüschel der Perspektivitätsachsen $H(x_{12}, \ldots)$ und die Projektivität zwischen dem Strahlenbüschel $H(x_1^H, \ldots)$ und der Punktreihe der Perspektivitätszentren $h(X_{13}, \ldots)$.

15. In einem Büschel kollinearer Felder bleibt die zu einem Paare homologer Punkte X_1^h, X_{2n}^h von σ_1, σ_{2n} auf dem Deckstrahle h gehörige Perspektivitätsachse x_{12n} invariant, wenn σ_{2n} nacheinander mit den anderen Feldern des Büschels zusammenfällt (**12.**). Die zu den Felderpaaren σ_1, σ_2;

$\sigma_1, \sigma_4; \ldots; \sigma_1, \sigma_{2n}; \ldots$ bzw. gehörigen Strahlenbüschel $H(x_{12}, \ldots)$, $H(x_{14}, \ldots), \ldots$, $H(x_{12n}, \ldots), \ldots$ der Perspektivitätsachsen sind folglich identisch, und die zwischen der Punktreihe $h(X_1^h, \ldots)$ und dem Strahlenbüschel $H(x_{12n}, \ldots)$ bestehende Projektivität (**10.**) bleibt also dieselbe, welchen ganzzahligen Wert n auch annimmt. Durch den Büschel geht ein Bündelheer kollinearer Felder (**9.**). Es enthält die zu $\sigma_1, \sigma_2; \sigma_1, \sigma_4; \ldots; \sigma_1, \sigma_{2n}; \ldots$ bzw. invers kollinearen Felder $\sigma_1, \sigma_3; \sigma_1, \sigma_5; \ldots; \sigma_1, \sigma_{2n+1}; \ldots$; sie bestimmen auf dem H gegenüberliegenden Deckstrahle h die projektiven Punktreihen $h(X_{13}, \ldots)$, $h(X_{15}, \ldots), \ldots, h(X_{12n+1}, \ldots), \ldots$ der Perpektivitätszentren. Nun ist nach **14.** die Projektivität zwischen den Grundgebilden $H(x_1^H, \ldots)$ und $h(X_{12n+1}, \ldots)$ invers zu der zwischen den Grundgebilden $h(X_1^h, \ldots)$ und $H(x_{12n}, \ldots)$. Letztere Projektivität bleibt aber, wie eben bewiesen wurde, unverändert für jedes ganzzahlige n, folglich bleibt auch die Projektivität zwischen $H(x_1^H, \ldots)$ und $h(X_{12n+1}, \ldots)$ hierfür unverändert. Die projektiven Punktreihen $h(X_{13}, \ldots)$, $h(X_{15}, \ldots), \ldots, h(X_{12n+1}, \ldots), \ldots$ der Perspektivitätszentren sind also identisch, oder die Paare kollinearer Felder $\sigma_1, \sigma_3; \sigma_1, \sigma_5; \ldots; \sigma_1, \sigma_{2n+1}; \ldots$ rufen auf dem Deckstrahle h dieselbe zu dem Strahlenbüschel $H(x_1^H, \ldots)$ projektive Punktreihe der Perspektivitätszentren hervor und bilden somit eine Schar (**12.**). Demnach können wir schließen:

Die Büschel und Scharen im Bündelheere kollinearer Felder lassen sich einander so zuordnen, daß jeder Kollineation zwischen zwei Feldern eines Büschels die zu ihr inverse Kollineation zwischen den ihnen zugeordneten Feldern der Schar entspricht.

16. Soll die Korrelation eines polaren Feldes π^2 eine gegebene Punktinvolution $h(AA', BB', \ldots)$ und eine gegebene zu ihr perspektive Strahleninvolution $H(aa', bb', \ldots)$ miteinander vertauschen, so muß in π^2 die Gerade h die Polare des Punktes H sein. Ferner muß die Projektivität der Punktinvolution $h(AA', BB', \ldots)$ und die der Involution konjugierter Punkte von π^2 auf h füreinander invariant sein, folglich auch die der Strahleninvolution $H(aa', bb', \ldots)$ und die der Involution konjugierter Strahlen von π^2 in H. Nun bilden alle Punktinvolutionen, deren Projektivitäten für die der Involution $h(AA', BB', \ldots)$ invariant sind, einen Büschel (**5.**). Durch ein gegebenes Punktepaar auf h geht also eine seiner Involutionen. Sind demnach ein gegebener Punkt P und eine gegebene Gerade p Pol und Polare in π^2, ist somit der Punkt $hp \equiv P^h$ konjugiert

dem Schnittpunkte $\mathfrak{P}^h$ von h mit der Gerade HP, so sendet der Büschel durch das Punktepaar $P^h, \mathfrak{P}^h$ die auf h gelegene Involution konjugierter Punkte von π^2. Sie wird aus H durch eine Involution konjugierter Strahlen von π^2 projiziert. Je zwei dieser konjugierten Strahlen bilden mit h ein Polardreieck, und jedes solcher Polardreiecke, abgesehen vom Polardreiecke $HP^h\mathfrak{P}^h$, bestimmt mit dem Punkte P und seiner Polare p das polare Feld π^2. Also:

In einer Ebene π gibt es nur eine polare Korrelation, die eine gegebene Punktinvolution $h(AA', BB', \ldots)$ und eine gegebene zu ihr perspektive Strahleninvolution $H(aa', bb', \ldots)$ miteinander vertauscht, und dabei in π einem gegebenen Punkte P einen gegebenen Strahl p als Polare zuordnet.

Die reellen oder konjugiert imaginären Doppelelemente der Involutionen $h(AA', BB', \ldots)$ und $H(aa', bb' \ldots)$ sind bzw. die mit h inzidenten Ecken und die mit H inzidenten Seiten eines Polardreiecks von π^2. Somit ist nach unserm Satze ein polares Feld π^2 auch dann bestimmt durch ein Polardreieck und einen gegebenen Punkt P und seine Polare p, wenn zwei Seiten des Dreiecks und folglich die ihnen gegenüberliegenden Ecken konjugiert imaginär sind.

Fällt p nacheiander mit allen Geraden der Ebene π zusammen, so ergeben sich ∞^2 polare Felder π^2, deren Korrelationen die Punktinvolution $h(AA', BB', \ldots)$ mit der zu ihr perspektiven Strahleninvolution $H(aa', bb', \ldots)$ vertauschen. Durch je zwei polare Felder π^2 geht ein Büschel und eine Schar solcher Felder oder:

Die polaren Felder einer Ebene, deren Korrelationen eine gegebene Punktinvolution $h(AA', BB', \ldots)$ mit einer gegebenen zu ihr perspektiven Strahleninvolution $H(aa', bb', \ldots)$ vertauschen, bilden ein Bündelheer. Das gemeinsame Polardreieck der polaren Felder kann reell sein oder ein Paar konjugiert imaginärer Ecken haben.

17. Wir haben kollineare Felder $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ kennengelernt, deren Kollineationen eine gegebene Punktinvolution $h(AA', BB', \ldots)$ und eine zu ihr perspektive Strahleninvolution $H(aa', bb', \ldots)$ invariant lassen (**9.**), und polare Felder $\pi^2, \pi_1^2, \ldots$, deren Korrelationen jene beiden Involutionen miteinander vertauschen (**16.**). Welche Beziehung besteht nun zwischen der Korrelation des Feldes π^2 und der Kollineation zwischen den Feldern

$\varrho_1(\mathfrak{A}_1, a_1, \ldots)$ und $\varrho_2(\mathfrak{A}_2, a_2, \ldots)$, in welche die kollinearen Felder $\sigma_1(A_1, a_1, \ldots)$ und $\sigma_2(A_2, a_2, \ldots)$ bzw. durch jene Korrelation transformiert werden?

Zunächst haben die kollinearen Felder ϱ_1, ϱ_2 und die kollinearen Felder σ_1, σ_2 die Deckelemente h und H gemein. Dann gehen die homologen Strahlenbüschel $H(x_1^H, \ldots)$ und $H(x_2^H, \ldots)$ von σ_1 und σ_2 im Deckpunkte H über in die homologen Punktreihen $h(\mathfrak{X}_1^h, \ldots)$ und $h(\mathfrak{X}_2^h, \ldots)$ von ϱ_1 und ϱ_2 auf dem Deckstrahle h. Endlich verwandelt sich die Punktreihe $h(X_{12}, \ldots)$ der zu den homologen Strahlen $x_1^H, x_2^H; \ldots$ gehörigen Perspektivitätszentren $X_{12}, \ldots$ in den Strahlenbüschel $H(\mathfrak{x}_{12}, \ldots)$ der zu den homologen Punkten $\mathfrak{X}_1^h, \mathfrak{X}_2^h; \ldots$ gehörigen Perspektivitätsachsen $\mathfrak{x}_{12}, \ldots$. Nun bestimmt die Strahleninvolution $H(aa', bb', \ldots)$ einen Büschel projektiver Strahlenbüschel, der außer der Strahleninvolution die Strahlenbüschel $H(x_1^H, \ldots)$ und $H(x_2^H, \ldots)$ und den die Punktreihe $h(X_{12}, \ldots)$ projizierenden Strahlenbüschel $H(x_{12}^H, \ldots)$ enthält (**10.**). Der Büschel projektiver Strahlenbüschel wird, da die Korrelation des polaren Feldes π^2 die zueinander perspektiven Involutionen $H(aa', bb', \ldots)$ und $h(AA', BB', \ldots)$ miteinander vertauscht, durch die Korrelation von π^2 in einen durch die Punktinvolution $h(AA', BB', \ldots)$ gehenden Büschel projektiver Punktreihen übergeführt. Dieser Büschel enthält also außer der Punktinvolution $h(AA', BB', \ldots)$ die homologen Punktreihen $h(\mathfrak{X}_1^h, \ldots)$ und $h(\mathfrak{X}_2^h, \ldots)$ von ϱ_1 und ϱ_2 und die Punktreihe $h(\mathfrak{X}_{12}^h, \ldots)$, in der h den Büschel $H(\mathfrak{x}_{12}, \ldots)$ der zu den homologen Punkten $\mathfrak{X}_1^h, \mathfrak{X}_2^h; \ldots$ gehörigen Perspektivitätsachsen schneidet. Vertauscht aber die Korrelation von π^2 die beiden zueinander perspektiven Involutionen $H(aa', bb', \ldots)$ und $h(AA', BB', \ldots)$ miteinander, so müssen die Projektivitäten der Involution $h(AA', BB', \ldots)$ und der durch π^2 auf h bestimmten Involution konjugierter Punkte füreinander invariant sein. Die Projektivität letzterer Involution verwandelt nun die homologen Punktreihen $h(X_1^h, \ldots)$ und $h(X_2^h, \ldots)$ von σ_1 und σ_2 in die homologen Punktreihen $h(\mathfrak{X}_1^h, \ldots)$ und $h(\mathfrak{X}_2^h, \ldots)$ von ϱ_1 und ϱ_2 und die Punktreihe $h(X_{12}, \ldots)$ in die zum Strahlenbüschel $H(\mathfrak{x}_{12}, \ldots)$ perspektive Punktreihe $h(\mathfrak{X}_{12}^h, \ldots)$. Sind aber die Projektivitäten der Involution $h(AA', BB', \ldots)$ und der Involution konjugierter Punkte von π^2 auf h füreinander invariant, so werden je zwei projektive Punktreihen des durch $h(AA', BB', \ldots)$ gehenden Büschels durch die Projektivität der Involution konjugierter Punkte in die zu ihnen invers projektiven Punktreihen übergeführt (**6.**). Folglich ist die

Projektivität der homologen Strahlenbüschel $H(x_1^h, \ldots)$ und $H(x_2^h, \ldots)$ von σ_1 und σ_2 invers zur Projektivität der homologen Punktreihen $h(\mathfrak{X}_1^h, \ldots)$ und $h(\mathfrak{X}_2^h, \ldots)$ von ϱ_1 und ϱ_2 und die Projektivität zwischen dem Strahlenbüschel $H(x_1^h, \ldots)$ und der Punktreihe der Perspektivitätszentren $h(X_{12}, \ldots)$ invers zur Projektivität der Punktreihe $h(\mathfrak{X}_1^h, \ldots)$ und dem Strahlenbüschel der Perspektivitätsachsen $H(\mathfrak{x}_{12}, \ldots)$. Nach dem in **14.** bewiesenen Satze ist aber die Kollineation der Felder ϱ_1, ϱ_2 invers zu derjenigen der Felder σ_1, σ_2. Somit ergibt sich:

Bleiben in einer Ebene eine gegebene Punktinvolution $h(AA', BB', \ldots)$ und eine zu ihr perspektive Strahleninvolution $H(aa', bb', \ldots)$ für eine Kollineation invariant, während eine polare Korrelation sie miteinander vertauscht, so kehrt die polare Korrelation die Kollineation um. Alle polaren Felder, deren Korrelationen die gegebene Kollineation umkehren, bilden ein Bündelheer (**16.**). *Ihr gemeinsames Polardreieck ist zugleich das durch die Kollineation bestimmte Deckdreieck* (**9.**). *Seine Ecken sind entweder reell, oder zwei von ihnen sind konjugiert imaginär.*

18. Die Polaren $a_1, a_2; b_1, b_2; \ldots$ der Punkte $A, B, \ldots$ in zwei polaren Feldern $\sigma_1^\pi(Aa_1, Bb_1, \ldots)$ und $\sigma_2^\pi(Aa_2, Bb_2, \ldots)$ einer Ebene bilden die homologen Strahlen in zwei kollinearen Feldern σ_1 und σ_2. Der Punkt H habe nun in σ_1^π und σ_2^π die nämliche Polare h, dann ist H ein Deckpunkt und h ein Deckstrahl von σ_1 und σ_2. Fällt ein Punkt nacheinander mit den Punkten $X^h, Y^h, \ldots$ auf h zusammen und der mit ihm inzidente Strahl von H mit den Strahlen $x^H, y^H, \ldots$, so entsprechen der Punktreihe $h(X^h, Y^h, \ldots)$ die homologen Strahlenbüschel $H(x_1^H, y_1^H, \ldots)$ und $H(x_2^H, y_2^H, \ldots)$ von σ_1 und σ_2 und dem Strahlenbüschel $H(x^H, y^H, \ldots)$ die homologen Punktreihen $h(X_1^h, Y_1^h, \ldots)$ und $h(X_2^h, Y_2^h, \ldots)$. Durch die homologen Strahlenbüschel $H(x_1^H, y_1^H, \ldots)$ und $H(x_2^H, y_2^H, \ldots)$ geht ein Büschel projektiver Strahlenbüschel, durch die homologen Punktreihen $h(X_1^h, Y_1^h, \ldots)$ und $h(X_2^h, Y_2^h, \ldots)$ ein zu ihm perspektiver Büschel projektiver Punktreihen. Ersterer enthält (**2.**) eine Strahleninvolution $H(aa', bb', \ldots)$, letzterer eine zu ihr perspektive Punktinvolution $h(AA', BB', \ldots)$. Die Projektivität der Strahleninvolution ist invariant (**3.**) für die Projektivität zwischen den Strahlenbüscheln $H(x_1^H, y_1^H, \ldots)$ und $H(x_2^H, y_2^H, \ldots)$, die Projektivität der Punktinvolution für die zwischen den Punktreihen $h(X_1^h, Y_1^h, \ldots)$ und $h(X_2^h, Y_2^h, \ldots)$. Beide involutorischen Projek-

tivitäten sind also invariant für die Kollineation zwischen den Feldern σ_1 und σ_2.

Die polaren Felder σ_1^π und σ_2^π bestimmen nun auf h bzw. die Involutionen konjugierter Punkte $h(X^h X_1^h, Y^h Y_1^h, \ldots)$ und $H(X^h X_2^h, Y^h Y_2^h, \ldots)$. Die Projektivitäten dieser Involutionen verwandeln (**6.**) den durch die homologen Punktreihen $h(X_1^h, Y_1^h, \ldots)$ und $h(X_2^h, Y_2^h, \ldots)$ von σ_1 und σ_2 gehenden Büschel projektiver Punktreihen derart in sich selbst, daß die Projektivität zwischen je zwei seiner Punktreihen in die zu ihnen inverse Projektivität übergeht, während die seiner Involution invariant bleibt. Die Projektivitäten der Involution $h(AA', BB', \ldots)$ und der Involutionen konjugierter Punkte von σ_1^π und σ_2^π auf h sind also füreinander invariant, ebenso die Projektivitäten der Involution $H(aa', bb', \ldots)$ und der Involutionen konjugierter Strahlen von σ_1^π und σ_2^π in H. Folglich vertauschen die Korrelationen der polaren Felder σ_1^π und σ_2^π die für die Kollineation der Felder σ_1 und σ_2 invarianten Involutionen $h(AA', BB', \ldots)$ und $H(aa', bb', \ldots)$ miteinander. Kurz (**17.**):

Erzeugt in einer Ebene ein Feld mit zwei zu ihm korrelativen Feldern σ_1, σ_2 bzw. die polaren Felder σ_1^π, σ_2^π, so kehrt jede der polaren Korrelationen die Kollineation zwischen den Feldern σ_1, σ_2 um.

19. Die kollinearen Felder $\sigma_1(X_1, x_1, Y_1, y_1, \ldots)$, $\sigma_2(X_2, x_2, Y_2, y_2, \ldots)$, $\sigma_3(X_3, x_3, Y_3, y_3, \ldots), \ldots, \sigma_n(X_n, x_n, Y_n, y_n, \ldots), \ldots$ einer Schar bestimmen auf dem Deckstrahle h die homologen Punktreihen $h(X_1, Y_1^h, \ldots)$, $h(X_2^h, Y_2^h, \ldots)$, $h(X_3^h, Y_3^h, \ldots), \ldots, h(X_n^h, Y_n^h, \ldots), \ldots$; sie bilden einen Büschel projektiver Punktreihen. Liegt nun ein Feld σ zu zwei Feldern der Schar — etwa zu σ_1 und σ_2 — involutorisch korrelativ, erzeugt es also mit ihnen zwei polare Felder $\sigma_1^\pi(Xx_1, Yy_1, \ldots)$ und $\sigma_2^\pi(Xx_2, Yy_2, \ldots)$, so rufen σ_1^π und σ_2^π auf h bzw. die Involutionen konjugierter Punkte $h(X^h X_1^h, Y^h Y_1^h, \ldots)$ und $h(X^h X_2^h, Y^h Y_2^h, \ldots)$ hervor. Die Punktreihe $h(X^h, Y^h, \ldots)$, die mit zwei zu ihr projektiven Punktreihen involutorisch liegt, liegt involutorisch zu allen Punktreihen des durch die zwei Punktreihen gehenden Büschels zu ihr projektiver Punktreihen (**7.**). Folglich ergeben sich auf h noch die Involutionen $h(X^h X_3^h, Y^h Y_3^h, \ldots), \ldots, h(X^h X_n^h, Y^h Y_n^h, \ldots), \ldots$. Die Korrelation zwischen σ und σ_3 weist somit in den Dreiecken $H X^h X_3^h$, $H Y^h Y_3^h, \ldots$ jedem Eckpunkte die ihm gegenüberliegende Seite zu. Das gleiche gilt in der Korrelation zwischen σ und σ_n für die Dreiecke $H X^h X_n^h$, $H Y^h Y_n^h, \ldots$.

Die Korrelationen zwischen σ und den Feldern $\sigma_3, \ldots, \sigma_n, \ldots$ sind also auch involutorisch*). Sie liefern bzw. die polaren Felder $\sigma_3^\pi(X x_3, Y y_3, \ldots), \ldots, \sigma_n^\pi(X x_n, Y y_n, \ldots), \ldots$. — Die Pole, welche die polaren Felder $\sigma_1^\pi, \sigma_2^\pi, \ldots, \sigma_n^\pi, \ldots$ einem gegebenen Strahle zuordnen, bilden nun eine Gerade und demnach die polaren Felder selbst eine Schar. Somit ist dargetan:

Liegt ein Feld zu zwei Feldern einer Schar kollinearer Felder involutorisch korrelativ, so liegt es involutorisch korrelativ zu allen ihren Feldern und erzeugt mit ihnen die polaren Felder einer Schar.

Aus diesem Satze und dem zu ihm dualen folgt, da durch zwei kollineare Felder einer Ebene eine Schar und ein Büschel kollinearer Felder und somit ein Bündelheer geht (**9.**):

Ist ein Feld korrelativ zu den Feldern eines Bündelheeres kollinearer Felder, und liegt es zu zwei Feldern des Bündelheeres involutorisch, so liegt es zu allen seinen Feldern involutorisch. Die erzeugten polaren Felder bilden selbst ein Bündelheer, ihre Korrelationen kehren die Kollineationen zwischen den Feldern des Bündelheeres kollinearer Felder um.

20. Die Aufgabe, alle kollinearen Räume mit demselben Decktetraeder zu bestimmen, gleichgültig ob seine Ecken reell oder paarweise konjugiert imaginär sind, verlangt die Konstruktion aller kollinearen Räume, deren Kollineationen zwei gegebene Punkt- oder Ebeneninvolutionen mit windschiefen Trägern invariant lassen.

Es seien $u(A_u A'_u, B_u B'_u, \ldots)$ und $v(A_v A'_v, B_v B'_v, \ldots)$ zwei solcher Punktinvolutionen und $\Sigma_1(A_1, a_1, \alpha_1, \ldots)$ und $\Sigma_2(A_2, a_2, \alpha_2, \ldots)$ zwei der gesuchten kollinearen Räume, deren Kollineationen die Involutionen in sich selbst überführen sollen, also ihre Träger zu Deckstrahlen haben. Dann gehen durch zwei gegebene homologe Punkte P_1 und P_2 von Σ_1 und Σ_2 zwei homologe mit den Deckstrahlen u und v inzidente Geraden p_1 und p_2. Sie schneiden u in den homologen Punkten P_1^u und P_2^u und v in den homologen Punkten P_1^v und P_2^v von Σ_1 und Σ_2, und die durch die drei Paare einander entsprechender Punkte P_1, P_2; P_1^u, P_2^u und P_1^v, P_2^v bestimmten projektiven Punktreihen $p_1\,(P_1, P_1^u, P_1^v, \ldots)$ und $p_2\,(P_2, P_2^u, P_2^v, \ldots)$ sind homologe Punktreihen der gesuchten kollinearen Räume. Der durch die Involution $u\,(A_u A'_u, B_u B'_u, \ldots)$ gehende Büschel projektiver Punktreihen (**2.**) muß

*) *v. Staudt*, Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, S. 131.

nun die auf u gelegenen homologen Punktreihen $u\,(A_1^u, \ldots)$ und $u\,(A_2^u, \ldots)$ von Σ_1 und Σ_2 enthalten, und der durch die Involution $v\,(A_v\,A_v', B_v\,B_v', \ldots)$ gehende die auf v gelegenen homologen Punktreihen $v\,(A_1^v, \ldots)$ und $v\,(A_2^v, \ldots)$ von Σ_1 und Σ_2. Jene homologen Punktreihen sind durch die Involution $u\,(A_u\,A_u', B_u\,B_u', \ldots)$ und die homologen Punkte P_1^u, P_2^u bestimmt, diese durch die Involution $v\,(A_v\,A_v', B_v\,B_v', \ldots)$ und die homologen Punkte P_1^v, P_2^v. Dem Punkte $p_1 u \equiv P_1^u$ entspricht nun der Punkt $p_2 u \equiv P_2^u$, und dem Punkte $p_1 v \equiv P_1^v$ der Punkt $p_2 v \equiv P_2^v$, folglich können die Ebenen $p_1 u$ und $p_1 v$ auf *eine* Weise kollinear so bzw. auf die Ebenen $p_2 u$ und $p_2 v$ bezogen werden, daß die Punktreihen $p_1(P_1, P_1^u, P_1^v, \ldots)$, $u(A_1^u, \ldots, P_1^u \ldots)$ und $v\,(A_1^v, \ldots, P_1^v, \ldots)$ den bzw. zu ihnen projektiven Punktreihen $p_2\,(P_2, P_2^u, P_2^v, \ldots)$, $u\,(A_2^u, \ldots, P_2^u, \ldots)$ und $v\,(A_2^v \ldots, P_2^v, \ldots)$ entsprechen*). Hierdurch ist aber diejenige Kollineation zwischen den Räumen Σ_1 und Σ_2 bestimmt**), für welche die beiden gegebenen Involutionen invariant sind, und die dem Punkte P_1 den Punkt P_2 entsprechen läßt.

Fällt P_2 nacheinander mit allen Punkten des Raumes zusammen, so erhalten wir ∞^3 kollineare Räume Σ_2. Durch je zwei geht eine Schar solcher Räume, durch je drei, die nicht in einer Schar liegen, ein Heer. Die ∞^3 kollinearen Räume, deren Kollineationen die Involutionen $u(A_u\,A_u', B_u\,B_u', \ldots)$ und $v(A_v\,A_v', B_v\,B_v', \ldots)$ invariant lassen, bilden also eine zum Gebüsche duale Mannigfaltigkeit, die wir als „Verband" bezeichnen wollen.

Mit den Punktinvolutionen $u(A_u\,A_u', B_u\,B_u', \ldots)$ und $v(A_v\,A_v', B_v\,B_v', \ldots)$ bleiben die aus den Strahlen u und v sie wechselseitig projizierenden Ebeneninvolutionen $u(\alpha_u\,\alpha_u', \beta_u\,\beta_u', \ldots)$ und $v(\alpha_v\,\alpha_v', \beta_v\,\beta_v', \ldots)$ für die Kollineation zwischen Σ_1 und Σ_2 invariant. Sind π_1 und π_2 zwei gegebene Ebenen, so können somit Σ_1 und Σ_2 auch als kollineare Räume definiert werden, deren Kollineation die Ebeneninvolutionen $u(\alpha_u\,\alpha_u', \beta_u\,\beta_u', \ldots)$ und $v(\alpha_v\,\alpha_v', \beta_v\,\beta_v', \ldots)$ invariant läßt, und π_1 und π_2 einander zuordnet. Fällt π_2 nacheinander mit allen Ebenen des Raumes zusammen, so erhalten wir wiederum die ∞^3 kollinearen Räume Σ_2. Nunmehr geht aber durch je zwei von ihnen ein Büschel solcher Räume, also durch je drei von ihnen,

---

*) *v. Staudt*, Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, S. 64.

**) A. a. O., S. 68.

die in keinem Büschel liegen, ein Bündel. Somit bilden Σ_1 und die Räume Σ_2 nicht nur einen Verband, sondern auch ein Gebüsch oder kurz einen „Gebüschverband" kollinearer Räume. Als Gesamtergebnis obiger Überlegungen kann nunmehr der Satz ausgesprochen werden:

Es läßt sich nur eine Kollineation bestimmen, für die zwei gegebene Punktinvolutionen mit windschiefen Trägern u und v und folglich auch die sie aus u und v wechselweise projizierenden Ebeneninvolutionen invariant sind, und die außerdem zwei gegebene Punkte oder Ebenen einander entsprechen läßt. Alle kollinearen Räume, deren Kollineationen zwei Punktinvolutionen mit windschiefen Trägern u, v und folglich auch die sie aus u, v wechselweise projizierenden Ebeneninvolutionen invariant lassen, bilden einen Gebüschverband. Seine kollinearen Räume haben das nämliche Decktetraeder. Die Ecken des Tetraeders sind reell oder paarweise konjugiert imaginär. Zwei kollineare Räume bestimmen einen sie enthaltenden Gebüschverband.

In einem Deckstrahle bestimmen die kollinearen Räume eines Gebüschverbandes ∞^1 homologe Punktreihen und Ebenenbüschel, die einen Büschel projektiver Punktreihen bzw. einen Büschel projektiver Ebenenbüschel bilden. Je zwei kollineare Räume des Gebüschverbandes erzeugen einen tetraedralen Strahlenkomplex. Für die Ordnungskurven eines solchen sind die einander zugeordneten Elemente der Involution im Büschel projektiver Punktreihen konjugiert*). Das gleiche gilt für seine Ordnungsgewinde und die einander zugeordneten Elemente der Involution im Büschel projektiver Ebenenbüschel. Die durch die Ordnungskurven der Strahlenkomplexe gehenden Flächen II. Ordnung bestimmen also in den Deckstrahlen der kollinearen Räume des Gebüschverbandes die nämliche Involution konjugierter Punkte, die durch die Ordnungsgewinde gehenden Flächen II. Klasse die nämliche Involution konjugierter Ebenen.

21. Die Punktinvolutionen $u(A_u\, A'_u, B_u\, B'_u, \ldots)$ und $v(A_v\, A'_v, B_v\, B'_v, \ldots)$ mit den windschiefen Trägern u, v seien gegeben, ferner zwei kollineare Räume $\Sigma_1(A_1, a_1, \alpha_1, \ldots)$ und $\Sigma_2(A_2, a_2, \alpha_2, \ldots)$, deren Kollineation die Involutionen invariant läßt, und die einen tetraedralen Strahlenkomplex $\mathfrak{S}^2_{12}$ erzeugen. Die Komplexkegel von $\mathfrak{S}^2_{12}$ rufen auf u und v die Involutionen

*) *Jolles* in *Reye*'s Geometrie der Lage, Dritte Abteilung, IV. Auflage, Leipzig 1910, S. 209.

konjugierter Punkte $u(A_u A'_u, B_u B'_u, \ldots)$ und $v(A_v A'_v, B_v B'_v, \ldots)$ hervor, sonach bestehen die sie aus einem gegebenen Punkte P projizierenden Strahleninvolutionen aus Paaren konjugierter Strahlen für den Komplexkegel mit dem Mittelpunkte P. Der von P ausstrahlende Komplexkegel kann folglich konstruiert werden, sobald außer diesen zwei Involutionen für ihn konjugierter Strahlen noch ein zu den Deckstrahlen von Σ_1 und Σ_2 windschiefer mit P inzidenter Komplexstrahl s bekannt ist*). Nun durchdringen die Komplexkegel zweier gegebenen Punkte Q und R von s den Komplexkegel aus dem Punkte P in s und zwei kubischen Raumkurven, die Ordnungskurven von $\mathfrak{S}^2_{12}$ sind**). Da aber mit Hilfe zweier Ordnungskurven eines tetraedralen Strahlenkomplexes alle seine Strahlen ermittelt werden können***), so folgt:

Ein tetraedraler Strahlenkomplex ist bestimmt durch zwei Gegenkanten seines Haupttetraeders, durch die Involutionen konjugierter Punkte, die seine Ordnungskurven auf ihnen hervorrufen, und durch einen zu den Kanten des Haupttetraeders windschiefen Komplexstrahl. Das Haupttetraeder und ein zu seinen Kanten windschiefer Komplexstrahl definieren also einen tetraedralen Strahlenkomplex, gleichgültig ob die Ecken des Haupttetraeders reell oder paarweise konjugiert imaginär sind.

22. Es sei s ein zu den Kanten des Haupttetraeders windschiefer Strahl eines tetraedralen Strahlenkomplexes $\mathfrak{S}^2_{12}$ mit zwei Paaren konjugiert imaginärer Hauptpunkte†). Auf den zwei reellen Kanten u, v des Haupttetraeders seien die auf ihnen gelegenen konjugiert imaginären Hauptpunkte die Doppelpunkte der elliptischen Involutionen $u(A_u A'_u, B_u B'_u, \ldots)$ und $v(A_v A'_v, B_v B'_v, \ldots)$. Nun ist die dem Haupttetraeder umbeschriebene durch zwei gegebene Punkte P und Q gehende kubische Raumkurve als Durchdringungskurve der von P und Q ausstrahlenden Komplexkegel eine Ordnungskurve des Strahlenkomplexes. Letztere Eigenschaft führt dazu, auch nach allen Ordnungskurven von $\mathfrak{S}^2_{12}$ zu forschen, die mit s zwei konjugiert imaginäre Punkte gemein haben; insbe-

---

*) *v. Staudt*, Beiträge zur Geometrie der Lage, Nürnberg 1856, S. 118.

**) *Reye*, Die Geometrie der Lage, Zweite Abteilung, Hannover 1866, S. 118.

***) A. a. O., S. 120.

†) *Jolles* in *Reye*'s Geometrie der Lage, Dritte Abteilung, IV. Auflage, Leipzig 1910, S. 209.

sondere diejenige unter ihnen zu bestimmen, die durch die Doppelpunkte einer auf s gegebenen elliptischen Involution $s(A_s A'_s\ B_s B'_s, \ldots)$ geht. Kurz, wir wenden uns zur Lösung der Aufgabe, eine kubische Raumkurve durch die Doppelpunkte der drei elliptischen Punktinvolutionen $u(A_u A'_u, B_u B'_u, \ldots)$, $v(A_v A'_v, B_v B'_v, \ldots)$ und $s(A_s A'_s, B_s B'_s, \ldots)$ zu legen, sie also aus drei Paaren gegebener konjugiert imaginärer Punkte zu konstruieren.

Jedes Punktepaar der elliptischen Involution $s(A_s A'_s, B_s B'_s, \ldots)$ wird durch je ein Punktepaar harmonisch getrennt. Das Punktepaar A_s, A'_s etwa durch das Punktepaar M_s, M'_s. Die einander zugeordneten Punkte A_s und A'_s sind somit die Doppelpunkte einer hyperbolischen Involution, deren Projektivität die Involution $s(A_s A'_s, B_s B'_s, \ldots)$ invariant läßt, d. h. die konjugiert imaginären Doppelpunkte dieser elliptischen Involution einander zuordnet. Durch jedes Punktepaar von s geht eine Ordnungskurve des tetraedralen Strahlenkomplexes $\mathfrak{S}^2_{12}$. Die durch die Punktepaare G, H und I, K der hyperbolischen Involution gehenden Ordnungskurven mögen bzw. k^3 und l^3 heißen. Die Kurven k^3 und l^3 gehören einem Büschel von Ordnungskurven an; er liegt mit s auf einer Regelfläche II. Ordnung R^2, und seine Kurven schneiden s in den Punktepaaren der hyperbolischen Involution*). Die Doppelpunkte A_s und A'_s der hyperbolischen Involution sind für alle Kurven des Büschels konjugiert, somit auch für jede Fläche II. Ordnung, die eine von ihnen enthält. Die durch s gehende Regelschar von R^2 besteht nun aus den gemeinsamen Bisekanten der kubischen Raumkurven des Büschels. Jede dieser gemeinsamen Bisekanten ist als Komplexstrahl auch eine Bisekante unendlich vieler nicht im Büschel enthaltener Ordnungskurven und bildet mit jeder von ihnen die Basiskurve eines F^2-Büschels, dessen Flächen die Regelfläche R^2 außer in jener gemeinsamen Bisekante noch je in einer auf R^2 gelegenen Ordnungskurve durchdringen. Während eine Fläche einen solchen F^2-Büschel durchläuft, beschreibt die Polarebene eines gegebenen Punktes X_s von s für diese Fläche einen zum F^2-Büschel projektiven Ebenenbüschel x. Eine Ebene ξ des Büschels x geht durch den X_s in der elliptischen Involution

---

*) *Reye*, Die Geometrie der Lage, Dritte Abteilung, IV. Auflage, Leipzig 1910, S. 7.

$s(A_sA'_s, B_sB'_s, \ldots)$ zugeordneten Punkt X'_s. Für die ξ entsprechende Fläche Ξ^2 des F^2-Büschels und folglich auch für die auf ihr gelegene Ordnungskurve ξ^3 von R^2 sind also außer den Punkten A_s und A'_s auch die Punkte X_s und X'_s dieser Involution konjugiert. Somit ruft ξ^3 auf s die Involution konjugierter Punkte $s(A_sA'_s, B_sB'_s, \ldots)$ hervor. *Die Ordnungskurve ξ^3 ist demnach die gesuchte kubische Raumkurve, welche die Doppelpunkte der drei gegebenen elliptischen Involutionen $u(A_uA'_u, B_uB'_u, \ldots)$, $v(A_vA'_v, B_vB'_v, \ldots)$ und $s(A_sA'_s, B_sB'_s, \ldots)$ enthält und durch diese drei Paare konjugiert imaginärer Punkte bestimmt ist.*

Hiermit ist eine synthetische aus reellen Elementen sich organisch aufbauende Konstruktion einer kubischen Raumkurve aus drei Paaren ihrer konjugiert imaginären Punkte gewonnen*). Außerdem ist durch die vorstehende Untersuchung erwiesen:

Alle kubischen Raumkurven, die auf zwei gemeinsamen windschiefen Bisekanten die nämlichen Involutionen konjugierter Punkte hervorrufen und eine gegebene Gerade s zur (wirklichen oder virtuellen) Bisekante haben, sind Ordnungskurven eines durch s gehenden tetraedralen Strahlenkomplexes. Die Doppelpunkte der Involutionen sind die Ecken seines Haupttetraeders, und sonach können letztere reell oder paarweise konjugiert imaginär sein.

23. Zwei kollineare Räume $\Sigma_1(A_1, a_1, \alpha_1, \ldots)$ und $\Sigma_2(A_2, a_2, \alpha_2, \ldots)$, die einen tetraedralen Strahlenkomplex $\mathfrak{S}^2_{12}$ erzeugen, verbindet ein Büschel zu ihm perspektiver kollinearer Räume. In jedem Raume des Büschels entspricht einem zu den Kanten des Haupttetraeders von $\mathfrak{S}^2_{12}$ windschiefen Komplexstrahle s je ein Strahl**) eines durch s gehenden Komplexkegels K^2 von $\mathfrak{S}^2_{12}$. Ist $\Sigma_3(A_3, a_3, \alpha_3, \ldots)$ ein nicht im Büschel enthaltener kollinearer Raum des Σ_1 und Σ_2 verbindenden Gebüschverbandes (**20.**), so entsprechen dem Strahle s in den kollinearen Räumen des Σ_1 und Σ_3 verbindenden Büschels die Strahlen***) einer Regelschar II. Ordnung $\mathfrak{R}^2$, durch deren Leitschar

---

*) Andere Konstruktionen der kubischen Raumkurve aus drei Paaren konjugiert imaginärer Punkte lieferten *Hoßfeld*, Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, Jahrgang 33, S. 114 und *Thomae*, Berichte über d. Verhandlungen d. Königl. Sächs. Gesellschaft d. Wissenschaften, Math.-Phys. Klasse, B. 54, S. 121.

**) *Reye*, Die Geometrie der Lage, Zweite Abteilung, Hannover 1868, S. 125.

***) *Reye*, Ueber lineare Mannigfaltigkeiten projektiver Ebenenbüschel und collinearer Bündel im Raume, I, dieses Journal Bd. 104, S. 128.

der durch Σ_1 und Σ_3 erzeugte tetraedrale Strahlenkomplex $\mathfrak{S}^2_{13}$ geht. Die Trägerfläche R^2 beider Scharen ruft folglich auf den Deckstrahlen der kollinearen Räume des Gebüschverbandes die nämlichen Involutionen konjugierter Punkte hervor, wie der Kegel K^2 (**21.**), und die Flächen K^2 und R^2 durchdringen sich außer im Strahle s noch in einer kubischen Raumkurve s^3, die auf den Deckstrahlen ebenfalls diese Involutionen konjugierter Punkte bestimmt. Da aber s sowohl eine Bisekante von s^3, wie auch ein Strahl von $\mathfrak{S}^2_{12}$ ist, so erweist sich s^3 als eine Ordnungskurve von $\mathfrak{S}^2_{12}$ (**22.**). Die Regelschar $\mathfrak{R}^2$ besteht folglich aus Strahlen dieses tetraedralen Komplexes. In anderen Worten:

Je zwei Räume eines Gebüschverbandes kollinearer Räume erzeugen einen für die Kollineationen seiner Räume invarianten tetraedralen Strahlenkomplex. Ein tetraedraler Strahlenkomplex ist für die Kollineationen aller kollinearen Räume invariant, deren Decktetraeder mit seinem Haupttetraeder zusammenfällt, die Ecken des Tetraeders mögen reell oder paarweise konjugiert imaginär sein.

24. Zwei Gegenkanten u, v vom Hauptetraeder des durch die kollinearen Räume $\Sigma_1(A_1, a_1, \alpha_1, \ldots)$ und $\Sigma_2(A_2, a_2, \alpha_2, \ldots)$ erzeugten tetraedralen Strahlenkomplexes $\mathfrak{S}^2_{12}$ sind stets reell*). Nun rufen Σ_1, Σ_2 und irgend ein dritter Raum Σ_3 des durch Σ_1 und Σ_2 gehenden Gebüschverbandes auf jedem Hauptstrahle drei homologe Punktreihen hervor, die in einem Büschel projektiver Punktreihen liegen (**20.**). Da aber die Projektivität zweier Punktreihen eines Büschels seine übrigen projektiven Punktreihen invariant läßt (**3.**), so werden zwei homologe mit u, v inzidente Strahlen s_1, s_2 von Σ_1 und Σ_2 durch die Kollineation zwischen Σ_1 und Σ_3 wiederum in zwei homologe mit u, v inzidente Strahlen t_1, t_2 von Σ_1 und Σ_2 übergeführt. Für die zwischen Σ_1 und Σ_3 bestehende Kollineation ist aber der durch Σ_1 und Σ_2 erzeugte tetraedrale Strahlenkomplex $\mathfrak{S}^2_{12}$ invariant (**23.**), folglich wird die durch die homologen Punktreihen s_1 und s_2 von Σ_1 und Σ_2 erzeugte Regelschar II. Grades von $\mathfrak{S}^2_{12}$ durch die Kollineation von Σ_1 und Σ_3 in die durch die homologen Punktreihen t_1 und t_2 von Σ_1 und Σ_2 erzeugte Regelschar

---

*) *Jolles* in *Reye*'s Geometrie der Lage, Dritte Abteilung, IV. Auflage, Leipzig 1910, S. 209.

II. Grades von $\mathfrak{S}^2_{12}$ übergeführt. D. h., die Kollineation zwischen Σ_1 und Σ_3 vertauscht je zwei homologe Punkte von Σ_1 und Σ_2 wiederum mit je zwei homologen Punkten dieser kollinearen Räume, oder:

Die Kollineationen zwischen den Räumen eines Gebüschverbandes kollinearer Räume sind füreinander invariant.

25. Es gibt nur zwei kollineare Räume Σ_1 und Σ_2, deren Kollineation zwei gegebene Punktinvolutionen $u(A_u A'_u, B_u B'_u, \ldots)$ und $v(A_v A'_v, B_v B'_v, \ldots)$ mit den windschiefen Trägern u, v invariant läßt, und die zwei gegebene Punkte P_1, P_2 einander zuweist (**20.**). Die homologen zentrischen Bündel P_1, P_2 von Σ_1, Σ_2 erzeugen die durch die Punkte P_1, P_2 gehende Ordnungskurve p^3 des zu Σ_1 und Σ_2 perspektiven tetraedralen Strahlenkomplexes $\mathfrak{S}^2_{12}$. Eine zweite Ordnungskurve q^3 von $\mathfrak{S}^2_{12}$ werde erzeugt durch die homologen zentrischen Bündel Q_1, Q_2 beider kollinearen Räume. p^3 und q^3 liegen auf einer Regelfläche II. Ordnung*). Ihre eine Regelschar besteht aus gemeinsamen Bisekanten, ihre andere Regelschar aus gemeinsamen Unisekanten der Raumkurven. Die Regelschar der Unisekanten, in der die Geraden $P_1 Q_1$ und $P_2 Q_2$ liegen**), bezieht p^3 und q^3 projektiv aufeinander. Die projektiven kubischen Raumkurven p^3 und q^3 können nun als homologe Kurven zweier kollinearen Räume Σ_p und Σ_q angesehen werden, deren Kollineation sie bestimmen***). Die Kollineation zwischen Σ_p und Σ_q läßt wiederum die gegebenen Punktinvolutionen $u(A_u A'_u, B_u B'_u, \ldots)$ und $v(A_v A'_v, B_v B'_v, \ldots)$ invariant, es entsprechen sich aber nunmehr P_1 und Q_1 sowie P_2 und Q_2. Also:

Läßt eine Kollineation zwei gegebene Punktinvolutionen auf windschiefen Trägern invariant, und läßt sie die gegebenen Punkte P_1 und P_2 sowie Q_1 und Q_2 einander entsprechen, so gibt es auch eine Kollineation, für die ebenfalls die beiden Punktinvolutionen invariant sind, die aber die Punkte P_1 und Q_1 sowie P_2 und Q_2 einander entsprechen läßt.

Insbesondere gilt, wenn die gegebenen Punktinvolutionen hyperbolisch sind†):

Entsprechen in zwei kollinearen Räumen mit dem Decktetraeder ABCD

---

*) *Reye*, Die Geometrie der Lage, Zweite Abteilung, Hannover 1868, S. 120.
**) *Reye*, Die Geometrie der Lage, Zweite Abteilung, Hannover 1868, S. 122.
***) *v. Staudt*, Beiträge zur Geometrie der Lage, Nürnberg 1860, S. 319.
†) A. a. O. S. 332.

den gegebenen Punkten P_1, Q_1 bzw. die Punkte P_2, Q_2, so ist das Tetraeder $ABCD$ auch das Decktetraeder zweier kollinearen Räume, in denen den Punkten P_1, P_2 bzw. die Punkte Q_1, Q_2 entsprechen.

Nach dem oberen Satze verwandelt die Kollineation der Räume Σ_p und Σ_q die kollinearen Räume Σ_1 und Σ_2 in sich selbst. Fallen die homologen Punkte Q_1, Q_2 von Σ_1 und Σ_2 nacheinander mit allen anderen homologen Punkten der Räume zusammen und folglich die Ordnungskurve q^3 nacheinander mit allen Ordnungskurven des zu Σ_1 und Σ_2 perspektiven tetraedralen Strahlenkomplexes $\mathfrak{S}^2_{12}$, so fällt auch der Raum Σ_q nacheinander mit allen zu Σ_1 kollinearen Räumen zusammen, deren Kollineationen für die Kollineation von Σ_1 und Σ_2 invariant sind. Sonach ist von neuem dargetan (**24.**): zwei Räume eines Gebüschverbandes kollinearer Räume und folglich auch der von ihnen erzeugte tetraedrale Strahlenkomplex sind invariant für die Kollineationen zwischen allen Räumen des Gebüschverbandes.

26. *Es seien gegeben zwei Punktinvolutionen $u(A_u A'_u, B_u B'_u, \ldots)$ und $v(A_v A'_v, B_v B'_v, \ldots)$ mit den windschiefen Trägern u, v und folglich auch die sie aus u und v wechselweise projizierenden Ebeneninvolutionen. Dann läßt sich nur eine polare Korrelation bestimmen, welche die Punktinvolutionen mit den zu ihnen perspektiven Ebeneninvolutionen vertauscht und einem gegebenen Punkte P eine gegebene Ebene π als Polarebene zuordnet.*

Soll nämlich die Korrelation eines polaren Raumes Π^2 die gegebenen Punktinvolutionen mit den zu ihnen wechselweise perspektiven Ebeneninvolutionen u, v vertauschen, so müssen ihre Träger u und v reziproke Polaren in Π^2 sein. Ferner müssen die Projektivitäten der gegebenen Punkt- und Ebeneninvolutionen bzw. die von Π^2 in u und v hervorgerufenen Involutionen konjugierter Punkte und konjugierter Ebenen invariant lassen. Die für die Projektivitäten der Involutionen $u(A_u A'_u, B_u B'_u, \ldots)$ und $v(A_v A'_v, B_v B'_v, \ldots)$ bzw. invarianten Punktinvolutionen bilden nun auf u und v je einen Büschel (**5.**). Ist aber in Π^2 der Punkt P der Pol der Ebene π, so ist der Punkt $\pi u \equiv P_u$ der Pol der Ebene Pv, und P_u also dem Schnittpunkte $\mathfrak{P}_u$ der Ebene Pv mit u konjugiert. Ebenso sind die Punkte $\pi v \equiv P_v$ und $\mathfrak{P}_v$ konjugiert, wenn v in $\mathfrak{P}_v$ die Ebene Pu trifft. Folglich sendet der eine Büschel von Involutionen durch das Punktepaar P_u, $\mathfrak{P}_u$ die gesuchte Involution konjugierter Punkte von Π^2 auf u und der andere durch das Punktepaar P_v, $\mathfrak{P}_v$ die gesuchte Involution kon-

jugierter Punkte von Π^2 auf v. Je zwei konjugierte Punkte auf u und je zwei auf v bilden zusammen die Ecken eines Polartetraeders von Π^2. Jedes dieser Polartetraeder bestimmt mit dem Punkte P und seiner Polarebene π den polaren Raum Π^2, sobald P weder mit einer Ebene, noch π mit einer Ecke des Polartetraeders inzident ist. W. z. b. w.

Die reellen oder konjugiert imaginären Doppelpunkte der Involutionen $u(A_u A'_u, B_u B'_u, \ldots)$ und $v(A_v A'_v, B_v B'_v, \ldots)$ sind die Ecken eines Polartetraeders von Π^2. Somit ist ein polarer Raum nach unserm Satze auch dann durch ein Polartetraeder und einen gegebenen Punkt P und seine Polarebene π bestimmt, wenn die Ecken des Tetraeders und folglich auch die ihnen gegenüberliegenden Ebenen paarweise konjugiert imaginär sind.

Fällt π nacheinander mit allen Ebenen des Raumes zusammen, so ergeben sich ∞^3 polare Räume Π^2, deren Korrelationen die Punktinvolutionen $u(A_u A'_u, B_u B'_u, \ldots)$ und $v(A_v A'_v, B_v B'_v, \ldots)$ mit den wechselweise zu ihnen perspektiven Ebeneninvolutionen u, v vertauschen. Durch je zwei solcher polaren Räume geht ein Büschel und eine Schar von ihnen, oder:

Die polaren Räume, deren Korrelationen zwei gegebene Punktinvolutionen $u(A_u A'_u, B_u B'_u, \ldots)$ *und* $v(A_v A'_v, B_v B'_v, \ldots)$ *auf den windschiefen Trägern* u, v *mit den sie aus* u *und* v *wechselweise projizierenden Ebeneninvolutionen vertauschen, bilden einen Gebüschverband. Das gemeinsame Polartetraeder der Räume kann reelle oder paarweise konjugiert imaginäre Ecken haben.*

27. Die Kollineation der zu dem tetraedralen Strahlenkomplexe $\mathfrak{S}^2_{12}$ perspektiven kollinearen Räume Σ_1 und Σ_2 möge die auf den windschiefen Trägern u, v bzw. gelegenen Punktinvolutionen $u(A_u A'_u, B_u B'_u, \ldots)$ und $v(A_v A'_v, B_v B'_v, \ldots)$ invariant lassen und folglich auch die sie wechselweise aus u, v projizierenden Ebeneninvolutionen. Nun bilden alle polaren Räume, deren Korrelationen jene Punktinvolutionen mit diesen zu ihnen wechselweise perspektiven Ebeneninvolutionen vertauschen, einen Gebüschverband (**26.**). Er sendet durch zwei gegebene Punkte einen Büschel von Inzidenzflächen seiner polaren Räume. Somit wird ein gegebener Strahl von $\mathfrak{S}^2_{12}$ in jedem seiner Punkte von je einer Basiskurve eines solchen Büschels berührt, und alle diese Büschel haben folglich den gemeinsamen Basiskomplex $\mathfrak{S}^2_{12}$. Ein tetraedraler Strahlenkomplex $\mathfrak{S}^2_{12}$ ist hiernach der

Basiskomplex von unendlich vielen Büscheln im Gebüsche polarer Räume*). Der Basiskomplex eines F^2-Büschels ist aber für die Korrelationen der polaren Räume aller Flächen des Büschels invariant, $\mathfrak{S}^2_{12}$ also für die Korrelationen der polaren Räume von unendlich vielen Büscheln des Gebüschverbandes. Gestützt hierauf wollen wir den tetraedralen Strahlenkomplex $\mathfrak{S}^2_{12}$ als invariant für die Korrelation jedes polaren Raumes des Gebüschverbandes erweisen.

Durch einen gegebenen Punkt gehen nämlich ∞^1 Basiskurven von Büscheln des Gebüschverbandes mit dem Basiskomplexe $\mathfrak{S}^2_{12}$. Je zwei von ihnen liegen, da alle durch einen Punkt gehenden Inzidenzflächen von polaren Räumen des Gebüschverbandes einen Bündel bilden, auf einer Inzidenzfläche. Die Polaren eines gegebenen Strahles s von $\mathfrak{S}^2_{12}$ für die Flächen zweier F^2-Büschel des Gebüschverbandes, deren Basiskurven sich in einem gegebenen Punkte P schneiden, beschreiben somit zwei Komplexkegel von $\mathfrak{S}^2_{12}$ mit einem gemeinsamen Strahle t. Die Kegel durchdringen sich außer in t noch in einer Ordnungskurve p^3 des Komplexes. In gleicher Weise konstruieren wir eine zweite Ordnungskurve q^3 von $\mathfrak{S}^2_{12}$. Der tetraedrale Strahlenkomplex $\mathfrak{S}^2_{12}$ ist dann durch die Ordnungskurven p^3 und q^3 bestimmt. Nun bilden die Polaren des Strahles s für alle polaren Räume des Gebüschverbandes auch einen tetraedralen Strahlenkomplex**). Er hat ebenfalls die Ordnungskurven p^3 und q^3 und ist folglich mit dem tetraedralen Strahlenkomplexe $\mathfrak{S}^2_{12}$ identisch. Die Polare eines gegebenen Strahles s von $\mathfrak{S}^2_{12}$ ist hiernach in jedem polaren Raume des Gebüschverbandes wiederum ein Strahl dieses Komplexes. Kurz:

Vertauschen die Korrelationen der polaren Räume eines Gebüschverbandes zwei gegebene Punktinvolutionen mit den windschiefen Trägern u und v mit den sie aus u, v wechselweise projizierenden Ebeneninvolutionen, so ist, wenn die Kollineation zweier kollinearen Räume Σ_1, Σ_2 die gegebenen Punktinvolutionen invariant läßt, auch der von Σ_1 und Σ_2 erzeugte tetraedrale Strahlen-

---

*) Für einen tetraedralen Strahlenkomplex mit einem reellen Haupttetraeder bewiesen von *Reye* in seiner Geometrie der Lage, Dritte Abteilung, III. Auflage, Leipzig 1892, S. 178.

**) *Reye*, Die Geometrie der Lage, Dritte Abteilung, III. Auflage, Leipzig 1892, S. 141.

komplex für die Korrelationen aller polaren Räume des Gebüschverbandes invariant. Ein tetraedraler Strahlenkomplex ist für die Korrelation jedes polaren Raumes invariant, zu dessen Polartetraedern sein Haupttetraeder gehört, die Ecken des Haupttetraeders mögen reell oder paarweise konjugiert imaginär sein.

28. Die kollinearen Räume $\Sigma_1(A_1, a_1, \alpha_1, \ldots)$ und $\Sigma_2(A_2, a_2, \alpha_2, \ldots)$, deren Kollineation auf den windschiefen Deckstrahlen u, v die gegebenen Involutionen $u(A_u A'_u, B_u B'_u, \ldots)$ und $v(A_v A'_v, B_v B'_v, \ldots)$ invariant läßt, bestimmen auf u und v bzw. die homologen Punktreihen $u(A_1^u, \ldots)$, $u(A_2^u, \ldots)$ und $v(A_1^v, \ldots)$, $v(A_2^v, \ldots)$. Die ersteren liegen in dem durch die Involution $u(A_u A'_u, B_u B'_u, \ldots)$ gehenden Büschel projektiver Punktreihen, die letzteren in dem durch die Involution $v(A_v A'_v, B_v B'_v, \ldots)$ gehenden Büschel. Die Korrelation eines polaren Raumes Π^2 vertausche nun die Involutionen $u(A_u A'_u, B_u B'_u, \ldots)$ und $v(A_v A'_v, B_v B'_v, \ldots)$ mit den sie wechselweise aus u und v projizierenden Ebeneninvolutionen. Dann ist die Involution konjugierter Punkte von Π^2 in u für die Projektivität der Involution $u(A_u A'_u, B_u B'_u, \ldots)$ invariant, und ebenso die Involution konjugierter Punkte in v für die der Involution $v(A_v A'_v, B_v B'_v, \ldots)$. Analog verhalten sich die Involutionen konjugierter Ebenen von Π^2 in u und v zu den Projektivitäten der die gegebenen Punktinvolutionen aus u und v wechselweise projizierenden Ebeneninvolutionen. Die polare Korrelation von Π^2 transformiert somit die homologen Ebenenbüschel von Σ_1 und Σ_2 in u in die zu ihnen invers projektiven Punktreihen des durch die Involution $v(A_v A'_v, B_v B'_v, \ldots)$ gehenden Büschels projektiver Punktreihen (**6.**), die homologen Ebenenbüschel in v in die zu ihnen invers projektiven Punktreihen des durch die Involution $u(A_u A'_u, B_u B'_u, \ldots)$ gehenden Büschels. Duales folgt für die zu den homologen Ebenenbüscheln in u und v wechselweise perspektiven homologen Punktreihen von Σ_1 und Σ_2 in u und v. Sind somit in dem Σ_1 und Σ_2 verbindenden Gebüschverbande Σ_1 und Σ_3 invers kollinear zu den Räumen Σ_1 und Σ_2, so verwandelt die Korrelation von Π^2 die homologen Punktreihen und Ebenenbüschel von Σ_1 und Σ_2 in u und v bzw. in die homologen Ebenenbüschel und Punktreihen von Σ_1 und Σ_3 in v und u. Je zwei homologe mit u und v inzidente Strahlen von Σ_1 und Σ_2 gehen hierbei in je zwei homologe mit v und u inzidente Strahlen von Σ_1 und Σ_3 über. Nun ist der von Σ_1 und Σ_2 erzeugte tetraedrale Strahlenkomplex $\mathfrak{C}_{12}^2$

invariant für die Korrelation des polaren Raumes Π^2 (**27.**) und perspektiv zu den Räumen Σ_1 und Σ_3. Die Polarebenen σ_1^π und σ_2^π der auf einem gegebenen Komplexstrahle s gelegenen homologen Punkte S_1 und S_2 von Σ_1 und Σ_2 schneiden sich also wiederum in einem Komplexstrahle t, und t ist außerdem die Schnittgerade zweier homologen Ebenen τ_1 und τ_3 von Σ_1 und Σ_3. Die beiden mit u und v inzidenten Strahlen, auf denen S_1 und S_2 liegen, sind aber einander entsprechende Strahlen s_1, s_2 von Σ_1 und Σ_2. Als solche werden sie nach obiger Überlegung durch die Korrelation von Π^2 in zwei homologe Strahlen t_1 und t_3 von Σ_1 und Σ_3 transformiert. Die Polaren t_1 und t_3 von s_1 und s_2 sind mit t und bzw. mit den Ebenen σ_1^π und σ_2^π inzident, sie liegen als homologe Strahlen von Σ_1 und Σ_3 in den homologen Ebenen τ_1 und τ_3 dieser Räume. Mit τ_1 und σ_1^π sind somit die beiden Geraden t und t_1, mit τ_3 und σ_2^π die beiden Geraden t und t_3 inzident, folglich fallen die Ebenen τ_1 und σ_1^π und τ_3 und σ_2^π zusammen.

Dies führt, wenn wir das in **26.** gefundene Ergebnis berücksichtigen, zu dem Satze:

Bleiben für die Kollineation zweier kollinearen Räume Σ_1, Σ_2 zwei gegebene Punktinvolutionen mit den windschiefen Trägern u, v invariant, während eine polare Korrelation die Punktinvolutionen mit den sie aus u, v wechselweise projizierenden Ebeneninvolutionen vertauscht, so kehrt die polare Korrelation die Kollineation um. Alle polaren Räume, deren Korrelationen eine solche Kollineation umkehren, bilden einen Gebüschverband. Ihr gemeinsames Polartetraeder ist zugleich das Decktetraeder von Σ_1 und Σ_2. Seine Ecken sind reell oder paarweise konjugiert imaginär. Im Gebüschverbande kollinearer Räume steht jedem Büschel eine Schar gegenüber, die aus den zu den Räumen des Büschels invers kollinearen Räumen besteht.

Aus unserem Satze läßt sich, wenn die gegebenen Punktinvolutionen $u(A_u A'_u, B_u B'_u, \ldots)$ und $v(A_v A'_v, B_v B'_v, \ldots)$ hyperbolisch sind, schließen*):

Haben in einem polaren Raume Π^2 mit dem Polartetraeder $ABCD$ die Punkte S_1 und S_2 die Polarebenen σ_1^π und σ_2^π, so ist das Tetraeder $ABCD$ auch das Decktetraeder zweier kollinearen Räume Σ_1 und Σ_2 mit den homologen Elementen S_1, S_2 und σ_2^π und σ_1^π.

---

*) *v. Staudt*, Beiträge zur Geometrie der Lage, Nürnberg 1860, S. 333.

29. Die Polarebenen $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; \ldots$ der Punkte $A, B, \ldots$ in zwei gegebenen polaren Räumen $\Sigma_1^n (A\alpha_1, B\beta_1, \ldots)$ und $\Sigma_2^n (A\alpha_2, B\beta_2, \ldots)$ sind homologe Ebenen zweier kollinearen Räume Σ_1 und Σ_2. Die polaren Räume Σ_1^n und Σ_2^n haben mindestens zwei gemeinsame reelle reziproke Polaren u, v. Sie sind Deckstrahlen der kollinearen Räume Σ_1 und Σ_2. Fällt ein Punkt nacheinander in die Punkte $X_u, Y_u, \ldots$ von u und die mit ihm inzidente Ebene von v in die Ebenen $\xi_v, \eta_v, \ldots$, so entsprechen der Punktreihe $u(X_u, Y_u, \ldots)$ die homologen Ebenenbüschel $v(\xi_1^v, \eta_1^v, \ldots)$ und $v(\xi_2^v, \eta_2^v, \ldots)$ von Σ_1 und Σ_2 und dem Ebenenbüschel $v(\xi_v, \eta_v, \ldots)$ die homologen Punktreihen $u(X_1^u, Y_1^u, \ldots)$ und $u(X_2^u, Y_2^u, \ldots)$. Durch die zwei homologen Ebenenbüschel geht ein Büschel projektiver Ebenenbüschel, durch die zwei homologen Punktreihen ein zu ihm perspektiver Büschel projektiver Punktreihen (**2.**). Die Ebeneninvolution $v(\alpha_v \alpha_v', \beta_v \beta_v', \ldots)$ im ersteren ist perspektiv zur Punktinvolution $u(A_u A_u', B_u B_u', \ldots)$ im letzteren. Da die Ebeneninvolution invariant bleibt (**3.**) für die Projektivität der Ebenenbüschel $v(\xi_1^v, \eta_1^v, \ldots)$ und $v(\xi_2^v, \eta_2^v, \ldots)$ und die Punktinvolution für die Projektivität der Punktreihen $u(X_1^u, Y_1^u, \ldots)$ und $u(X_2^u, Y_2^u, \ldots)$, so sind beide Involutionen invariant für die Kollineation der Räume Σ_1 und Σ_2. Die polaren Räume Σ_1^n und Σ_2^n bestimmen nun auf u bzw. die Involutionen konjugierter Punkte $u(X_u X_1^u, Y_u Y_1^u, \ldots)$ und $u(X_u X_2^u, Y_u Y_2^u, \ldots)$. Die Projektivitäten dieser Involutionen verwandeln (**7.**) auf u den durch die homologen Punktreihen von Σ_1 und Σ_2 gehenden Büschel projektiver Punktreihen derart in sich selbst, daß je zwei seiner projektiven Punktreihen in die zu ihnen invers projektiven übergehen, während seine Involution invariant bleibt. Die Involution $u(A_u A_u', B_u B_u', \ldots)$ ist also für die Projektivitäten der Involutionen konjugierter Punkte von Σ_1^n und Σ_2^n auf u invariant und ebenso die Involution $v(\alpha_v \alpha_v', \beta_v \beta_v', \ldots)$ für die Projektivitäten der Involutionen konjugierter Ebenen von Σ_1^n und Σ_2^n in v. Auf gleiche Weise erhält man eine Punktinvolution in v, invariant für die Projektivitäten der Involutionen konjugierter Punkte von Σ_1^n und Σ_2^n in v und eine zu ihr perspektive Ebeneninvolution in u, invariant für die Projektivitäten der Involutionen konjugierter Ebenen beider polaren Räume in u. Somit vertauschen die polaren Korrelationen von Σ_1^n und Σ_2^n die für die Kollineation der Räume Σ_1 und Σ_2 invarianten Punktinvolutionen $u(A_u A_u', B_u B_u', \ldots)$ und

$v(A_v A'_v, B_v B'_v, \ldots)$ mit den zu ihnen wechselweise perspektiven Ebeneninvolutionen mit den Achsen v und u. Also (**28.**):

Erzeugt ein Raum mit zwei zu ihm korrelativen Räumen Σ_1 und Σ_2 bzw. die polaren Räume Σ_1^π und Σ_2^π, so kehrt jede der beiden Korrelationen die Kollineation zwischen den Räumen Σ_1 und Σ_2 um.

30. Für die Kollineationen zwischen den Räumen $\Sigma_1(X_1, x_1, \xi_1, Y_1, y_1, \eta_1, \ldots), \ldots, \Sigma_n(X_n, x_n, \xi_n, Y_n, y_n, \eta_n, \ldots), \ldots$ einer Schar möge eine gegebene Punktinvolution auf dem Deckstrahle u und eine auf dem zu ihm windschiefen Deckstrahle v invariant bleiben. Bildet dann ein zu den Räumen der Schar korrelativer Raum Σ mit zweien von ihnen — etwa mit Σ_1 und Σ_2 — die polaren Räume $\Sigma_1^\pi(X\xi_1, Y\eta_1, \ldots)$ und $\Sigma_2^\pi(X\xi_2, Y\eta_2, \ldots)$, so sind die Deckstrahlen u und v reziproke Polaren von Σ_1^π und Σ_2^π, und auch die Korrelationen zwischen Σ und den Räumen $\Sigma_3, \ldots, \Sigma_n, \ldots$ vertauschen u und v miteinander. In den kollinearen Räumen $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n, \ldots$ bilden auf u die homologen Punktreihen $u(X_1^u, Y_1^u, \ldots), u(X_2^u, Y_2^u, \ldots), \ldots, u(X_n^u, Y_n^u, \ldots), \ldots$ einen Büschel projektiver Punktreihen (**20.**). Ferner rufen Σ_1^π und Σ_2^π auf u bzw. die Involutionen konjugierter Punkte $u(X_u X_1^u, Y_u Y_1^u, \ldots)$ und $u(X_u X_2^u, Y_u Y_2^u, \ldots)$ hervor. Die Punktreihe $u(X_u, Y_u, \ldots)$ ist hiernach projektiv und involutorisch zu zwei Punktreihen des Büschels projektiver Punktreihen. Liegt aber eine Punktreihe involutorisch zu zwei Punktreihen eines Büschels zu ihr projektiver Punktreihen, so liegt sie involutorisch zu allen seinen Punktreihen (**7.**). Es ergeben sich also in u noch die Involutionen $u(X_u X_3^u, Y_u Y_3^u, \ldots), \ldots, u(X_u X_n^u, Y_u Y_n^u, \ldots), \ldots$ eines Büschels. Duale Betrachtungen führen zu einem Büschel von Ebeneninvolutionen in u. Was von dem Strahle u gilt, gilt auch von seiner Polare v in Σ_1^π und Σ_2^π. So haben wir in v außer den Punktinvolutionen $v(X_v X_1^v, Y_v Y_1^v, \ldots)$ und $v(X_v X_2^v, Y_v Y_2^v, \ldots)$ von Σ_1^π und Σ_2^π noch die Punktinvolutionen $v(X_v X_3^v, Y_v Y_3^v, \ldots), \ldots, v(X_v X_n^v, Y_v Y_n^v, \ldots), \ldots$. In der Korrelation zwischen Σ und irgend einem der kollinearen Räume $\Sigma_3, \ldots, \Sigma_n, \ldots$ — etwa in der zwischen Σ und Σ_n — entspricht nunmehr in den Tetraedern, deren Ecken aus Punktepaaren der zwei Involutionen $u(X_u X_n^u, Y_u Y_n^u, \ldots)$ und $v(X_v X_n^v, Y_v Y_n^v, \ldots)$ bestehen, jeder Ecke ihre Gegenebene. Die Korrelationen zwischen Σ und den Räumen $\Sigma_3, \ldots, \Sigma_n, \ldots$ erweisen sich demnach ebenfalls als polare*)

*) *v. Staudt*, Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, S. 194.

und liefern die polaren Räume $\Sigma_3^n(X\xi_3, Y\eta_3, \ldots), \ldots, \Sigma_n^n(X\xi_n, Y\eta_n, \ldots), \ldots$. In diesen polaren Räumen sind einer gegebenen Ebene die Punkte einer Gerade als Pole zugeordnet. Die Räume bilden folglich eine Schar, und es ist dargetan:

Ist ein Raum polar korrelativ zu zwei Räumen einer Schar kollinearer Räume, so ist er polar korrelativ zu allen Räumen der Schar und erzeugt mit ihnen eine Schar polarer Räume.

Durch zwei kollineare Räume geht eine Schar und ein Büschel und somit ein Gebüschverband kollinearer Räume (**20.**). Daher folgt aus dem vorstehenden Lehrsatze und dem zu ihm dualen das umfassende Ergebnis:

Bezieht man einen Raum korrelativ auf die Räume eines Gebüschverbandes kollinearer Räume, und ist er polar korrelativ zu zwei Räumen des Gebüschverbandes, so ist er polar korrelativ zu allen seinen Räumen. Die erzeugten polaren Räume bilden einen Gebüschverband, und ihre Korrelationen kehren die Kollineationen zwischen den Räumen des Gebüschverbandes kollinearer Räume um.

Halensee, den 1. April 1916.

Über Elementarkettenbrüche, lineare Substitutionen und indefinite binäre quadratische Formen. I.

Von Herrn *Paul Epstein* in Straßburg i. E.

Den Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit bildete der Gedanke, die Lehre von den gewöhnlichen Kettenbrüchen auf die begrifflich einfachsten Elemente zurückzuführen, in ähnlicher Weise etwa, wie allgemeine lineare Substitutionen auf andere von besonders einfacher Natur zurückgeführt werden. Als Weg hierzu bot sich naturgemäß die Auflösung des Euklidischen Algorithmus in eine Reihe von elementaren Schritten, indem nämlich alle Teilquotienten $= 1$ angenommen werden, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Ersetzung des Divisionsverfahrens durch eine Folge von Subtraktionen. So gelangt man zum Begriff der *Zahlenkette*, den wir an die Spitze unserer Darstellung gesetzt haben. Er führt unmittelbar zu einer besonderen Art von Kettenbrüchen — wir haben sie *Elementarkettenbrüche* (abgekürzt EK.) genannt —, bei denen sämtliche Teilnenner $+1$, alle Teilzähler entweder $+1$ oder -1 sind. Jede reelle Zahl läßt sich durch einen EK. darstellen, und *seine Näherungsbrüche sind die Haupt- und Nebennäherungsbrüche der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung**). Von den EK. gelangt man in einfachster Weise zu der Christoffel-Hurwitzschen *Charakteristik*, und sie gibt unmittelbar die Ver-

*) Dieselbe Eigenschaft haben die von Herrn *Vahlen* (Journ. f. Math. Bd. 115 S. 230) betrachteten „längsten Kettenbrüche“ mit den Teilnennern 1 und 2. Die EK. sind länger infolge des Auftretens der „überzähligen Näherungsbrüche“. Sie gehören auch nicht zu den „halbregelmäßigen Kettenbrüchen“. (*Perron*, Die Lehre von den Kettenbrüchen S. 154, *Tietze*, Math. Ann. Bd. 70.)

wandlung des $\mathfrak{EK}$. in einen gewöhnlichen Kettenbruch und umgekehrt. Damit wäre die ursprüngliche Aufgabe, die Theorie der gewöhnlichen Kettenbrüche auf möglichst einfacher Grundlage aufzubauen, erledigt. Aber darüber hinaus haben die $\mathfrak{EK}$. auch neben den gewöhnlichen Kettenbrüchen eine selbständige Bedeutung infolge des Umstandes, daß *zwei reziproke Zahlen durchaus verschiedene $\mathfrak{EK}$.-Entwicklungen besitzen.* Dies hat weittragende Folgen für die Theorie der unimodularen ganzzahligen Substitutionen $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$. Es tritt nämlich dort an Stelle des bekannten Satzes, daß die gewöhnlichen Kettenbrüche für zwei äquivalente Zahlen von einer bestimmten Stelle an übereinstimmen, der Satz, daß die $\mathfrak{EK}$.-Entwicklungen für zwei äquivalente Zahlen von einer bestimmten Stelle an *entweder übereinstimmen oder zueinander reziprok sind* (§ 4, Satz 8). Dadurch offenbart sich eine Scheidung der linearen Substitutionen in zwei Arten, in „*gerade*“ und „*ungerade*“ Substitutionen, und diese Einteilung tritt vollständig gleichberechtigt neben die übliche Einteilung in „eigentliche“ und „uneigentliche“ Substitutionen. So tritt neben die Gruppe $\mathfrak{A}$ der *eigentlichen* Substitutionen (Modulgruppe) die Gruppe $\mathfrak{B}$ der *geraden* Substitutionen, und zu ihnen kann man eine Gruppe $\mathfrak{C}$ fügen, die durch die *eigentlichen geraden* und die *uneigentlichen ungeraden* Substitutionen gebildet wird. Diese drei Gruppen sind isomorph, und*) es gibt in der Gruppe aller ganzzahligen unimodularen Substitutionen keine weitere Untergruppe vom Index 2. Sie enthalten als gemeinsame Untergruppe vom Index 2 die Gruppe der eigentlichen geraden Substitutionen**), von der wiederum die Hauptkongruenzgruppe 2. Stufe eine Untergruppe vom Index 3 darstellt. Wegen der Gleichberechtigung der Gruppen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ muß es zu jeder mit der *Modulgruppe* zusammenhängenden Theorie eine entsprechende Theorie im Gebiete der Gruppe $\mathfrak{B}$ und der Gruppe $\mathfrak{C}$ geben. Dies wird in einer zweiten Abhandlung für die *Reduktion der indefiniten binären quadratischen Formen* innerhalb der Gruppe der geraden Substitutionen durchgeführt werden, und es werden sich dabei die Elementarkettenbrüche als das natürliche Hilfsmittel erweisen.

---

*) Auf diese (vermutlich nicht neue) Tatsache hat mich Herr *J. Schur* aufmerksam gemacht.

**) Diese Gruppe ist identisch mit der Untergruppe Γ_2 bei *Klein-Fricke*, Elliptische Modulfunktionen Bd. I, S. 288.

§ 1. Die Zahlenkette.

Aus zwei gegebenen reellen Zahlen a_0, a_1 bilde man die Folge von positiven Zahlen:

$$(1.) \qquad a_2 = |a_0 - a_1|, \quad a_3 = |a_1 - a_2|, \quad a_4 = |a_2 - a_3|, \ldots .$$

Wir nennen dann $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine *Kette* von Zahlen und bezeichnen sie durch $[a_0, a_1]$.

Beispiel. Die Kette [28, 13] ist

$$28, 13, 15, 2, 13, 11, 2, 9, 7, 2, 5, 3, 2, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, \ldots .$$

Wenn, wie im vorliegenden Falle, zwei aufeinanderfolgende Zahlen einander gleich (allgemein $= d$) werden, so wiederholen sich von da ab die Zahlen $d, 0, d$ unbegrenzt, die Reihe wird *periodisch*. Nur in diesem Falle kann die Zahl 0 auftreten. Wir lassen gewöhnlich diesen periodischen Teil fort und nennen dann die Kette eine *eigentliche abbrechende Kette*. Nehmen wir aber eine gewisse Anzahl von Perioden hinzu, so haben wir eine *überzählige abbrechende Kette*. Wenn nichts anderes bemerkt ist, verstehen wir unter einer abbrechenden Kette immer eine eigentliche abbrechende Kette.

Sind a_0 und a_1 *ganze* Zahlen, so ist ihr größter gemeinsamer Teiler gleichzeitig Teiler von jeder Zahl der Kette, die Kette bricht ab und endigt mit dem größten gemeinsamen Teiler von a_0 und a_1. Sind a_0, a_1 relativ prim, so endigt die Kette immer mit den Zahlen 2, 1. Sie möge dann *primitiv* heißen.

Aus der Definition (1.) ist ersichtlich, daß jede Zahl der Kette in der Form

$$\alpha a_0 - \beta a_1$$

mit ganzzahligen Koeffizienten α, β darstellbar ist. Es kann also die Zahl 0 nur auftreten, wenn das Verhältnis $\frac{a_0}{a_1}$ rational ist, und wir haben den Satz:

1. *Die Kette* $[a_0, a_1]$ *bricht dann und nur dann ab, wenn* a_0 *und* a_1 *ein rationales Verhältnis haben.*

Es seien nun a_0, a_1 ganze positive Zahlen ohne gemeinsamen Teiler. Wir teilen die abbrechende Kette $[a_0, a_1]$ in *Abschnitte*, sodaß in einem Abschnitt *jede Zahl kleiner, als die vorhergehende* ist; sobald eine Zahl größer

ist, als die vorangehende, beginnt ein neuer Abschnitt. Jeder Abschnitt — allenfalls mit Ausnahme des ersten (wenn $a_0 < a_1$ ist) — besteht aus *mindestens zwei Zahlen*, denn wenn mit der Zahl a_i ein Abschnitt beginnt, so ist $a_{i-1} < a_i$, also $a_{i+1} = a_i - a_{i-1} < a_i$, d. h. a_{i+1} gehört zum gleichen Abschnitt wie a_i. Auch der letzte Abschnitt einer eigentlichen Kette enthält mindestens die zwei Zahlen 2, 1, dagegen besteht bei einer überzähligen Kette der letzte Abschnitt nur aus der einen Zahl 1, der vorletzte Abschnitt endigt dann mit den Zahlen 1, 0. Es ist, wenn a_{i-1} die Zahl am Schluß eines Abschnitts ist:

$$a_{i+1} = a_i - a_{i-1}, \quad a_{i+2} = a_i - a_{i+1},$$

also

$$a_{i+2} = a_{i-1}. \tag{2.}$$

Die Zahlen am Schluß eines jeden Abschnitts wiederholen sich drei Stellen weiter.

Es möge so die Kette in Abschnitte von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varrho, \sigma, \tau$ Zahlen zerfallen. Wir nennen dann

$$|\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varrho, \sigma, \tau| \tag{3.}$$

die *Gliederung* der Kette, und es sind darin sicher alle Zahlen mit Ausnahme der ersten und letzten > 1. Unter dieser Bedingung kann aber *jeder* Komplex (3.) von ganzen positiven Zahlen als *Gliederung einer bestimmten Kette* aufgefaßt werden, denn es besteht der Satz:

2. *Eine primitive Kette ist durch Angabe ihrer Gliederung vollständig bestimmt.*

Zum Beweis brauchen wir nur das Verfahren anzugeben, um aus der Gliederung die Kette zu gewinnen, und schicken folgendes voraus: Es seien u_1, u_2 zwei positive Zahlen ($u_1 < u_2$). Eine endliche oder unendliche Folge von Zahlen

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots,$$

bei der von u_3 ab *jede Zahl die Summe der beiden vorhergehenden* ist, heiße eine *Fibonaccische Folge* (u_1, u_2).

Wir bilden nun, wenn $\tau > 1$ ist, die *Fibonaccische Folge* $(1, 2)$ *mit* τ *Gliedern* und schreiben sie von rechts nach links. Dann haben wir den letzten Abschnitt der gesuchten Kette. Aus den beiden letzten Gliedern $u_{\tau-1}, u_\tau$ berechnen wir

$$v_1 = u_\tau - u_{\tau-1}, \qquad v_2 = u_\tau + v_1$$

und bilden die *Fibonaccische Folge* (v_1, v_2) *mit* σ *Gliedern.* Aus ihren beiden letzten Gliedern berechnen wir

$$w_1 = v_\sigma - v_{\sigma-1}, \qquad w_2 = v_\sigma + w_1$$

und bilden die *Fibonaccische Folge* (w_1, w_2) *mit* ϱ *Gliedern.* So berechnet man zu jeder Zahl der vorgelegten Gliederung eine Fibonaccische Folge. *Die Gesamtheit dieser Folgen,* von rechts nach links geschrieben, *bildet die gesuchte Kette,* die wir mithin als die Kette $\{\alpha, \beta, \ldots \sigma, \tau\}$ bezeichnen können. Ist aber $\tau = 1$, so besteht der letzte Abschnitt aus der einen Zahl 1, der vorletzte Abschnitt ist die *Fibonaccische Folge* (0, 1) *mit* σ *Gliedern,* und die übrigen Abschnitte werden nach dem obigen Verfahren gefunden. Man erhält die überzählige Kette $\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots \sigma, 1\}$.

Durch Weglassung der Perioden wird eine überzählige zu einer eigentlichen Kette. So wird, wenn $\sigma > 3$ ist, die überzählige Kette $\{\alpha, \beta, \ldots \varrho, \sigma, 1\}$ zur eigentlichen Kette $\{\alpha, \beta, \ldots \varrho, \sigma - 2\}$; wir schreiben

$$\{\alpha, \beta, \ldots \varrho, \sigma, 1\} = \{\alpha, \beta, \ldots \varrho, \sigma - 2\}.$$

Ist aber $\sigma = 2$, so ist

$$\{\alpha, \beta, \ldots \varrho, 2, 1\} = \{\alpha, \beta, \ldots \varrho\},$$

ist $\sigma = 3$, so ist $\{\alpha, \beta, \ldots \varrho, \sigma - 2\}$ wieder eine überzählige Kette und läßt sich weiter reduzieren.

Allgemein sei ν der letzte Abschnitt, der *nicht* $= 3$ ist, und es sei $\nu > 3$. Dann ist die überzählige Kette

(4.) $$\{\alpha, \beta, \ldots \mu, \nu, 3, 3, \ldots 3, 1\} = \{\alpha, \beta, \ldots \mu, \nu - 2\}.$$

Ist aber $\nu = 2$, so ist

(5.) $$\{\alpha, \beta, \ldots \mu, 2, 3, 3, \ldots 3, 1\} = \{\alpha, \beta, \ldots \mu\}.$$

Beispiel. Aus der Gliederung

$$\{2, 2, 3, 3, 4\}$$

ergibt sich die Kette

$$28\ 13 \mid 15\ 2 \mid 13\ 11\ 2 \mid 9\ 7\ 2 \mid 5\ 3\ 2\ 1.$$

Wir leiten nun aus einer Kette eine neue Kette ab, indem wir den letzten Abschnitt um eine Zahl verkürzen. Aus der Kette $\{\alpha, \beta, \ldots \sigma, \tau\}$ entsteht so die *erste abgeleitete Kette* $\{\alpha, \beta, .. \sigma, \tau - 1\}$. Im vorliegenden Beispiel ist dies die Kette $\{2, 2, 3, 3, 3\}$:

$$15\ 7 \mid 8\ 1 \mid 7\ 6\ 1 \mid 5\ 4\ 1 \mid 3\ 2\ 1;$$

aus ihr entsteht die *zweite abgeleitete Kette* $\{2, 2, 3, 3, 2\}$:

$$13\ 6 \mid 7\ 1 \mid 6\ 5\ 1 \mid 4\ 3\ 1 \mid 2\ 1.$$

Die nächste abgeleitete Kette $\{2, 2, 3, 3, 1\}$ ist eine überzählige Kette:

$$2\ 1 \mid 1\ 0 \mid 1\ 1\ 0 \mid 1\ 1\ 0 \mid 1,$$

und sie reduziert sich, wie man sieht, übereinstimmend mit (5.) auf $\{2\}$, d. i. die einfache Kette 2, 1. Wir behalten aber die überzählige Kette bei und können aus ihr wieder eine Kette $\{2, 2, 3, 3\}$ ableiten, und so fortfahrend erhalten wir schließlich aus der zugrunde gelegten Kette $\{2, 2, 3, 3, 4\}$ eine *vollständige Tafel abgeleiteter Ketten:*

28 13	15 2	13 11 2	9 7 2	5 3 2 1
15 7	8 1	7 6 1	5 4 1	3 2 1
13 6	7 1	6 5 1	4 3 1	2 1
2 1	1 0	1 1 0	1 1 0	1
11 5	6 1	5 4 1	3 2 1	
9 4	5 1	4 3 1	2 1	
2 1	1 0	1 1 0	1	
7 3	4 1	3 2 1		
5 2	3 1	2 1		
2 1	1 0	1		
3 1	2 1			
1 0	1			
2 1				
1				

Diese Tafel hat bemerkenswerte Eigenschaften. Es ist nicht nur jede Horizontalreihe, sondern auch *jede Vertikalreihe eine Kette*, genauer: Von jeder Stelle der Tafel geht nach rechts und nach unten eine Kette, und es hat *die vertikale Kette die umgekehrte Gliederung wie die horizontale Kette.* In unserem Beispiel hat die erste vertikale Kette die Gliederung $\{4, 3, 3, 2, 2\}$; sie möge die *erste Adjungierte* der vorgelegten Kette heißen. Die darauf folgenden Vertikalreihen bilden die zweite, dritte,... Adjungierte. Jede Adjungierte ist die abgeleitete Kette der vorhergehenden. Ist $[a_0, a_1]$ die gegebene, $[b_0, b_1]$ die erste abgeleitete Kette, so ist $[a_0, b_0]$ die erste, $[a_1, b_1]$ die zweite Adjungierte. Umgekehrt ist die gegebene Kette die erste Adjungierte ihrer Adjungierten.

Da die Tafel auch für die erste Adjungierte eine vollständige Tafel abgeleiteter Ketten darstellt, so zerfällt sie in *vertikale* und *horizontale Abschnitte. Jede Kette am Ende eines Abschnitts ist überzählig und stimmt mit der drittfolgenden Kette überein.* Dies folgt unmittelbar aus Formel (2).

Sind

$$\begin{matrix} a_{i-1} & a_i & a_{i+1} \\ b_{i-1} & b_i & b_{i+1} \\ c_{i-1} & c_i & c_{i+1} \end{matrix}$$

9 Zahlen in je 3 aufeinanderfolgenden Horizontal- und Vertikalreihen, so sind alle aus der Matrix dieser Zahlen gebildeten Unterdeterminanten 2. Grades gleich ± 1 und die Determinante aus den 9 Zahlen ist Null.

Man hat hiernach ein einfaches *Verfahren zur Auflösung der Diophantischen Gleichungen*

$$ax - by = \pm 1.$$

Man bilde die Kette $[a, b]$ und ihre abgeleitete Kette. Dann liefern die beiden ersten Zahlen der abgeleiteten Kette Lösungen y, x der einen Gleichung, und es sind $b - x$ und $a - y$ Lösungen der andern Gleichung.

Diese Eigenschaften der vollständigen Tafel der abgeleiteten Ketten werden evident, wenn wir nun dazu übergehen, den *Zusammenhang der Zahlenketten mit den Kettenbrüchen* zu betrachten.

§ 2. Endliche Elementarkettenbrüche.

Die Bildung der Zahlenkette ist ein besonderer *Euklidischer Algorithmus*, bei dem *alle Teilquotienten = 1* sind, und zwar für die Kette mit der Gliederung $\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \cdot a_1 + a_2 \\ a_1 &= 1 \cdot a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ \hline a_{\alpha-1} &= 1 \cdot a_\alpha - a_{\alpha+1} \\ a_\alpha &= 1 \cdot a_{\alpha+1} + a_{\alpha+2} \\ &\vdots \\ \hline a_{\alpha+\beta-1} &= 1 \cdot a_{\alpha+\beta} - a_{\alpha+\beta+1} \\ a_{\alpha+\beta} &= 1 \cdot a_{\alpha+\beta+1} + a_{\alpha+\beta+2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Hieraus entspringt eine Kettenbruchentwicklung

$$\frac{a_0}{a_1} = 1 + \underbrace{\frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} + \cdots + \frac{1}{|1}}_{\alpha} - \underbrace{\frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} + \cdots + \frac{1}{|1}}_{\beta} - \underbrace{\frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} + \cdots + \frac{1}{|1}}_{\gamma} - \cdots,$$

also ein Kettenbruch, der ebensoviele Teilnenner, sämtlich vom Werte $+1$, besitzt, als die Anzahl der Zahlen in der Kette beträgt, und bei dem die ersten Teilzähler in jedem Abschnitt (vom zweiten Abschnitt an) gleich -1, alle übrigen Teilzähler gleich $+1$ sind. Einen solchen Kettenbruch nennen wir *Elementarkettenbruch* (abgekürzt $\mathfrak{EK}$.) und können ihn vollkommen verständlich durch die Gliederung der Kette bezeichnen, indem wir ihn schreiben:

(1.) $$\mathfrak{E}\,|\alpha, \beta, \gamma, \ldots\, \sigma, \tau|.$$

$|\alpha, \beta, \gamma, \ldots\, \sigma, \tau|$ nennen wir dann auch die Gliederung des Kettenbruchs, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ heißen die Abschnitte des Kettenbruchs. Es besteht also der Satz:

1. *Zu jeder Kette* $[a_0, a_1]$ *gehört ein Elementarkettenbruch von der gleichen Gliederung, und sein Wert ist* $\frac{a_0}{a_1}$.

So gehört zu der Kette [28, 13] der $\mathfrak{EK}$.:

$$\mathfrak{E}\,\{2, 2, 3, 3, 4\}$$

oder

$$\frac{28}{13} = 1 + \frac{1}{|1} - \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} - \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} - \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} - \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1}.$$

Jeder Abschnitt eines $\mathfrak{EK}$. außer dem ersten und letzten besteht aus mindestens zwei Gliedern, d. h. *es folgen niemals zwei Teilzähler* -1 *aufeinander*, und umgekehrt ist *jeder derartige Kettenbruch* (mit lauter Teilnennern $+1$ und Teilzählern ± 1) *ein* $\mathfrak{EK}$. und einer bestimmten Kette zugeordnet. Zur Darstellung von *negativen* Zahlen werden wir auch $\mathfrak{EK}$. zulassen, bei denen die beiden ersten Abschnitte gleich 1 sind (s. u. Formel (14.)).

Zu einer eigentlichen Kette gehört ein *eigentlicher* $\mathfrak{EK}$.; bei ihm ist der letzte Abschnitt $\tau > 1$, der Kettenbruch schließt mit $\frac{+1}{|1}$. Einer überzähligen Kette entspricht ein *überzähliger* $\mathfrak{EK}$. mit $\tau = 1$; er schließt mit $\frac{-1}{|1}$.

Den abgeleiteten Ketten entsprechen (in umgekehrter Reihenfolge) die ***Näherungsbrüche*** des $\mathfrak{EK}$. Es sind dies die Elementarkettenbrüche (wir lassen das Zeichen $\mathfrak{E}$ weg):

$$\begin{array}{rrl} |1|; & |2|; \ldots & |\alpha| \\ |\alpha, 1|; & |\alpha, 2|; \ldots & |\alpha, \beta| \\ |\alpha, \beta, 1|; & |\alpha, \beta, 2|; \ldots & |\alpha, \beta, \gamma| \\ & \vdots & \\ |\alpha, \beta, \ldots \sigma, 1|; & |\alpha, \beta, \ldots \sigma, 2|; \ldots & |\alpha, \beta, \ldots \sigma, \tau|. \end{array}$$

Die Näherungsbrüche am Beginn eines jeden Abschnitts (vom zweiten Abschnitt an) sind *überzählig*; *jeder von ihnen ist gleich dem um 3 Stellen zurückliegenden Näherungsbruch.* Die übrigen Näherungsbrüche sind die *eigentlichen* Näherungsbrüche. Bei dem obigen $\mathfrak{EK}$. hat man die Näherungsbrüche

$$\frac{1}{1'}\ \frac{2}{1} \;\Big|\; \frac{1}{0'}\ \frac{3}{1} \;\Big|\; \frac{2}{1'}\ \frac{5}{2'}\ \frac{7}{3} \;\Big|\; \frac{2}{1'}\ \frac{9}{4'}\ \frac{11}{5} \;\Big|\; \frac{2}{1'}\ \frac{13}{6'}\ \frac{15}{7'}\ \frac{28}{13}.$$

Hier wird auch der Näherungsbruch $\frac{1}{0}$ als überzählig angesehen, indem man dem Näherungsbruch $\frac{1}{1}$ den Bruch $\frac{1}{0}$ als nullten eigentlichen Näherungsbruch vorausschickt. Für die Berechnung der Näherungsbrüche besteht das Gesetz:

Der Zähler (Nenner) eines $\overset{\text{eigentlichen}}{\text{überzähligen}}$ *Näherungsbruches ist die* $\overset{\text{Summe}}{\text{Differenz}}$ *der beiden vorhergehenden Zähler (Nenner).*

Um die Gesamtheit der Näherungsbrüche einfach zu übersehen, verstehen wir unter einer *gebrochenen Fibonaccischen Folge* von n Gliedern eine Reihe von n Brüchen $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots$, deren Zähler und Nenner Fibonaccische Folgen sind, sodaß also $\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} = \frac{a_i + a_{i-1}}{b_i + b_{i-1}}$ ist, und bezeichnen eine solche gebrochene Folge durch

$$\frac{(a_1, a_2)}{(b_1, b_2)_n}.$$

Es sei nun zunächst $\alpha > 1$. Dann bilden die α ersten Näherungsbrüche die gebrochene Folge $\frac{(1,2)}{(1,1)_\alpha}$. Die beiden letzten Brüche seien $\frac{a_{\alpha-1}}{a'_{\alpha-1}}, \frac{a_\alpha}{a'_\alpha}$; man berechnet

$$b_1 = a_\alpha - a_{\alpha-1}, \qquad b_2 = a_\alpha + b_1$$
$$b'_1 = a'_\alpha - a'_{\alpha-1}, \qquad b'_2 = a'_\alpha + b'_1$$

und hat in der gebrochenen Folge $\frac{(b_1, b_2)}{(b'_1, b'_2)_\beta}$ die β Näherungsbrüche des zweiten Abschnitts. Die beiden letzten Näherungsbrüche liefern

$$c_1 = b_\beta - b_{\beta-1}, \qquad c_2 = b_\beta + c_1$$
$$c'_1 = b'_\beta - b'_{\beta-1}, \qquad c'_2 = b'_\beta + c'_1,$$

und die gebrochene Folge $\frac{(c_1, c_2)}{(c'_1, c'_2)_\gamma}$ gibt die γ Näherungsbrüche des dritten Abschnitts. So erhält man der Reihe nach zu jedem Abschnitt des $\mathfrak{EK}$. die zugehörigen Näherungsbrüche.

Ist aber $\alpha = 1$, so ist $\frac{1}{1}$ der erste Näherungsbruch; die β Näherungsbrüche des zweiten Abschnitts bilden die gebrochene Folge $\frac{(0, 1)}{(1, 2)_\beta}$, und dann rechnet man wie oben weiter.

Aus der Bildungsweise der Näherungsbrüche erkennt man sofort:

2. *Die Zähler und Nenner sämtlicher Näherungsbrüche bilden* (von rückwärts genommen) *Zahlenketten von der umgekehrten Gliederung, wie der* $\mathfrak{EK}$. *und sein erster vollständiger Quotient,* d. h. es sind die Ketten

$$\{\tau, \sigma, \ldots \beta, \alpha\} \text{ und } \{\tau, \sigma, \ldots \beta, \alpha - 1\}.$$

Sie bilden mithin die erste und zweite Adjungierte der dem $\mathfrak{EK}$. *zugeordneten Zahlenkette* $[a_0, a_1]$.

Ist $[b_0, b_1]$ die erste abgeleitete Kette von $[a_0, a_1]$, so kann man die Gesamtheit der Näherungsbrüche symbolisch durch den Ausdruck

$$\frac{[a_0, b_0]}{[a_1, b_1]}$$

zusammenfassen, und es ist

$$(2.) \qquad \begin{aligned} \frac{a_0}{a_1} &= \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \sigma, \tau\} \\ \frac{b_0}{b_1} &= \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \sigma, \tau - 1\} \\ \frac{a_0}{b_0} &= \mathfrak{E}\{\tau, \sigma, \ldots \beta, \alpha\} \\ \frac{a_1}{b_1} &= \mathfrak{E}\{\tau, \sigma, \ldots \beta, \alpha - 1\}. \end{aligned}$$

Die Anzahl der Glieder einer abbrechenden Kette, also auch die *Anzahl der Teilnenner* oder *der Näherungsbrüche* des zugehörigen ℭℜ. nennen wir die *Länge* der Kette und des Kettenbruchs. Sie ist

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \sigma + \tau = l.$$

Ferner möge *die um 1 verminderte Anzahl der Abschnitte* oder die *Anzahl der negativen Teilzähler* oder *der überzähligen Näherungsbrüche* als die *Ordnung* der Kette und des Kettenbruchs bezeichnet werden.

Ebenso, wie man einen überzähligen ℭℜ. auf einen eigentlichen reduzieren kann, kann man auch einen eigentlichen ℭℜ. zu einem überzähligen von beliebiger Länge erweitern, und zwar auf zwei Arten. Nach (4.) und (5.) in § 1 ist:

$$(3.) \qquad \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \nu\} = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \mu, \nu + 2, 3, 3, \ldots 3, 1\}$$

und

$$(4.) \qquad \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \nu\} = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \mu, \nu, 2, 3, 3, \ldots 3, 1\}.$$

In der ersten Formel kann der ℭℜ. links auch ein überzähliger sein.

Es sei $\frac{P_i}{Q_i}$ der i^{te} Näherungsbruch, und es werde

$$(5.) \qquad P_i\, Q_{i-1} - P_{i-1}\, Q_i = \partial_i$$

gesetzt. Ist nun $\frac{P_i}{Q_i}$ ein *eigentlicher* Näherungsbruch, so ist $P_i = P_{i-1} + P_{i-2}$, $Q_i = Q_{i-1} + Q_{i-2}$, also

$$\partial_i = -\partial_{i-1}.$$

Ist aber $\frac{P_i}{Q_i}$ ein *überzähliger* Näherungsbruch, so ist $P_i = P_{i-1} - P_{i-2}$, $Q_i = Q_{i-1} - Q_{i-2}$, also

$$\partial_i = \partial_{i-1}.$$

Da nun $\partial_1 = -1$ ist, so folgt:

3. *Die zu den Näherungsbrüchen gehörenden Zahlen ∂_i sind in einem Abschnitt abwechselnd $+1$ und -1. Die erste Zahl in jedem Abschnitt stimmt mit der letzten des vorausgehenden Abschnitts überein. Die erste von allen Zahlen ∂_i ist -1.*

Der Näherungsbruch $\frac{P_i}{Q_i}$ hat als ℭℜ. die Länge i; seine Ordnung sei m, er gehöre also zum $(m+1)^{\text{ten}}$ Abschnitt. Dann ist offenbar

$$(6.) \qquad \partial_i = (-1)^{i-m}.$$

Führt man in (5.): $P_{i-1} = P_i \mp P_{i-2}$, $Q_{i-1} = Q_i \mp Q_{i-2}$ ein, je nachdem

$\frac{P_i}{Q_i}$ ein eigentlicher oder ein überzähliger Näherungsbruch ist, so folgt:

4. Es ist

(7.) $$P_i Q_{i-2} - P_{i-2} Q_i = (-1)^{i-m+1} \text{ oder } (-1)^{i-m},$$

je nachdem $\frac{P_i}{Q_i}$ *ein eigentlicher oder ein überzähliger Näherungsbruch ist.*

Ist $\frac{P_i}{Q_i}$ *nicht* der letzte Näherungsbruch in einem Abschnitt, also etwa, wenn der Abschnitt $\mu = \mu_1 + \mu_2$ ist:

$$\frac{P_i}{Q_i} = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu_1\},$$

und ist x_i der zugehörige vollständige Quotient:

$$x_i = \mathfrak{E}\{\mu_2, \nu, \ldots \sigma, \tau\},$$

so ist

(8.) $$\mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots \sigma, \tau\} = \frac{x_i P_i + P_{i-1}}{x_i Q_i + Q_{i-1}}.$$

Ist aber $\frac{P_i}{Q_i}$ *der letzte Näherungsbruch in einem Abschnitt,* also

$$\frac{P_i}{Q_i} = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \mu\}; \; x_i = \mathfrak{E}\{\nu, \ldots \sigma, \tau\},$$

so ist

(8*.) $$\mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \sigma, \tau\} = \frac{x_i P_i - P_{i-1}}{x_i Q_i - Q_{i-1}}.$$

Es sei a der Wert des $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. und $\frac{P_i}{Q_i}$ *nicht* der letzte Näherungsbruch in einem Abschnitt. Dann ist

$$a - \frac{P_i}{Q_i} = \frac{x_i P_i + P_{i-1}}{x_i Q_i + Q_{i-1}} - \frac{P_i}{Q_i} = -\frac{\partial_i}{Q_i (x_i Q_i + Q_{i-1})}, \text{ also}$$

$$\left| a - \frac{P_i}{Q_i} \right| = \frac{1}{Q_i (x_i Q_i + Q_{i-1})}.$$

Der vorausgehende Näherungsbruch gehöre zum gleichen Abschnitt; der zugehörige vollständige Quotient ist $x_{i-1} = 1 + \frac{1}{x_i}$, und es wird

$$\left| a - \frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}} \right| = \frac{1}{Q_{i-1} (x_{i-1} Q_{i-1} + Q_{i-2})} = \frac{x_i}{Q_{i-1} [x_i (Q_{i-1} + Q_{i-2}) + Q_{i-1}]}$$

$$= \frac{x_i}{Q_{i-1} (x_i Q_i + Q_{i-1})} = \frac{x_i Q_i}{Q_{i-1}} \left| a - \frac{P_i}{Q_i} \right|.$$

Setzt man

(9.) $$|a\,Q_i - P_i| = \Delta_i,$$

so ist also

(10.) $$\Delta_{i-1} = x_i\,\Delta_i.$$

Man sieht leicht, daß diese Formel allgemein gilt, auch wenn $\frac{P_i}{Q_i}$ der letzte Näherungsbruch in einem Abschnitt oder ein überzähliger Näherungsbruch ist. Nun ist $x_i = \frac{1}{|x_{i-1} - 1|}$, also

$$\Delta_i = |\,\Delta_{i-2} - \Delta_{i-1}|,$$

und damit hat man den Satz:

5. *Die Differenzen* $\Delta_i = |a\,Q_i - P_i|$ *bilden eine Zahlenkette, die mit den Zahlen* $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = |\,a - 1|$ *beginnt. Ihre Gliederung ist* $\{\alpha - 1, \beta, \gamma, \ldots \tau\}$ *oder* $\{\beta, \gamma, \ldots \tau\}$, *je nachdem* $\alpha \gtreqless 1$ *ist.*

Der $\mathfrak{EK}$. für $a = \frac{a_0}{a_1}$ entspringt aus der Zahlenkette $[a_0, a_1]$, und nach dem eben gefundenen Satz ist

(11.) $$|\,a_0\,Q_i - a_1\,P_i\,| = a_{i+1}.$$

Hiermit sind die Glieder der Zahlenkette durch die beiden ersten Glieder ausgedrückt.

Das *Vorzeichen* der oben bestimmten Größe $\partial_i = P_i Q_{i-1} - P_{i-1}\,Q_i = \pm 1$ wollen wir den *Index* des Näherungsbruches $\frac{P_i}{Q_i}$ nennen. Wir lassen nun die Indices der überzähligen Näherungsbrüche fort, behalten aber die Einteilung in Abschnitte bei und nennen die so gebildete Gesamtheit der Indices die *Indexkette* des $\mathfrak{EK}$. Es besteht also die Indexkette zum Kettenbruch $\mathfrak{E}\,\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots \tau\}$ aus lauter abwechselnden Vorzeichen $\pm$, mit $-$ beginnend, und zwar im ersten Abschnitt α, in den folgenden Abschnitten $\beta - 1, \gamma - 1, \ldots \tau - 1$ Indices. Durch die Indexkette ist der $\mathfrak{EK}$. vollständig bestimmt. So gehört zur Indexkette

$$-+-|+-+-+|-|+|-|+-|+-+|-|+-+-|+-|+-|+$$

der $\mathfrak{EK}$.: $\mathfrak{E}\,\{3, 6, 2, 2, 2, 3, 4, 2, 5, 3, 3, 2\}$.

Einer gegebenen Indexkette kann man eine zweite Kette zuordnen, indem man die fehlenden Trennungsstriche zwischen je zwei Indices hinzufügt und dafür die vorhandenen Trennungsstriche wegläßt. Diese neue Indexkette heiße die zur ersten *reziproke Indexkette.*

Die zur obigen Kette reziproke Kette ist also:

$-|+|-+|-|+|-|+-+-+|-+|-|+-+|-|+|-+|-+|-+$

und der zugehörige $\mathfrak{EK}$.: $\mathfrak{E}\{1, 2, 3, 2, 2, 2, 6, 3, 2, 4, 2, 2, 3, 3, 3\}$.

Die Indexkette steht in einfachem Zusammenhang mit der von *Christoffel* und Herrn *Hurwitz**) eingeführten *Charakteristik*. Wir stellen zunächst fest, daß die Näherungsbrüche des $\mathfrak{EK}$. auf Grund der oben beschriebenen Bildungsweise dieselben sind, wie die, welche man nach *Hurwitz* durch die *Fareyschen Reihen***) erhält. Man gibt nun jedem Näherungsbruch den *Charakter* + oder —, je nachdem er größer oder kleiner ist, als der Wert a des Kettenbruchs. Die Charaktere der eigentlichen Näherungsbrüche bilden in ihrer Gesamtheit die *Charakteristik* von a.

Ist $\frac{P_i}{Q_i}$ *nicht* der letzte Näherungsbruch in einem Abschnitt, so ist $a = \frac{P_i x + P_{i-1}}{Q_i x + Q_{i-1}} \lessgtr \frac{P_i}{Q_i}$, je nachdem $P_i Q_{i-1} - P_{i-1} Q_i \gtrless 0$ ist, also je nachdem $\frac{P_i}{Q_i}$ positiven oder negativen Index hat. Ist aber $\frac{P_i}{Q_i}$ der letzte Näherungsbruch in einem Abschnitt, so ist $a = \frac{P_i x - P_{i-1}}{Q_i x - Q_{i-1}} \lessgtr \frac{P_i}{Q_i}$, je nachdem der Index von $\frac{P_i}{Q_i}$ negativ oder positiv ist. Es besteht also der Satz:

6. *Für alle Näherungsbrüche in einem Abschnitt mit Ausnahme des letzten stimmt der Charakter mit dem Index überein; für den letzten Näherungsbruch in jedem Abschnitt ist der Charakter dem Index entgegengesetzt.*

Es wird also die *Indexkette* in die *Charakteristik* verwandelt, indem man nur jeden letzten Index in einem Abschnitt durch den entgegengesetzten ersetzt.

Von der Charakteristik gelangt man bekanntlich sofort zu der *gewöhnlichen* Kettenbruchentwicklung der Zahl a. Seien nämlich $q, q_1, q_2, \ldots$

---

*) *Christoffel*, Lehrsätze über arithmetische Eigenschaften der Irrationalzahlen, Annali di Matematica (2) **15** (1888).

Hurwitz, Über die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche. Math. Ann. **44** (1894).

**) Es ist gewiß bemerkenswert, daß bereits *Nicolas Chuquet* in seiner Triparty, 1484 in derselben Weise die Näherungsbrüche einer gegebenen Größe bildet. Vgl. *Cantor*, Gesch. d. Math. Bd. 2, S. 352. *Wertheim*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 42 (1898) Suppl. S. 149.

die Anzahlen der aufeinander folgenden gleichen Charaktere, beginnend mit q negativen Charakteren, so ist*)

$$a = [q, q_1, q_2, \ldots] = q + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \ldots .$$

Beginnt aber die Charakteristik mit q positiven Charakteren, so ist

$$a = [0, q, q_1, q_2, \ldots] = \frac{1}{q} + \frac{1}{q_1} + \ldots .$$

Indem wir die Indexkette in die Charakteristik verwandeln, haben wir also *einen* ℭℜ. *in einen gewöhnlichen Kettenbruch verwandelt*, und es besteht der Satz:

7. *Die eigentlichen Näherungsbrüche des Elementarkettenbruchs für eine Zahl a stimmen überein mit den Haupt- und Näherungsbrüchen***) *der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung von a.*

Ist wieder l die Länge, m die Ordnung des ℭℜ., so ist also die Summe aller Teilquotienten des gewöhnlichen Kettenbruchs

$$(12.) \qquad q + q_1 + q_2 + \cdots + q_n = l - m,$$

was sich auch daraus ergibt, daß Indexreihe und Charakteristik gleich lang sind.

So erhält man nach Satz 6. aus der Indexkette

$$- + - | + - + - + | - | + | - | + - | + - + | - | + - + - | + - | + - | +$$

die Charakteristik

$$- + + + - + - - + - + + + + - - + + - + + + + + + \pm$$

und der zugehörige ℭℜ. ist gleich dem regelmäßigen Kettenbruch

$$[1, 3, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 2, 2, 1, 7].$$

Der letzte Charakter kann nach Belieben $+$ oder $-$ genommen werden, entsprechend dem Umstand, daß man den Kettenbruch anstatt mit $q_n\,(>1)$ auch mit $q_n - 1 + \frac{1}{1}$ schließen kann.

---

*) Der kleine formale Unterschied gegen die Darstellung von Herrn *Hurwitz* (a. a. O. S. 430) kommt nur daher, daß dort dem Näherungsbruch $\frac{1}{1}$ noch die Brüche $\frac{1}{0}, \frac{0}{1}$ vorangehen.

**) Dabei rechnen wir abweichend von *Perron*, Die Lehre von den Kettenbrüchen S. 55, die Zahlen $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \ldots \frac{q-1}{1}$ zu den Näherungsbrüchen des Kettenbruchs.

Ebenso einfach ist die *Verwandlung eines gewöhnlichen Kettenbruchs in einen Elementarkettenbruch.* Man schreibt unter die Charakteristik des Kettenbruchs eine gleichlange Reihe von abwechselnden Vorzeichen $\pm$, mit $-$ beginnend. So oft ein Vorzeichen von dem darüberstehenden Charakter verschieden ist, ist ein Abschnitt zu Ende. Damit hat man die Indexkette des $\mathfrak{EK}$. und diesen selbst. So hat der gewöhnliche Kettenbruch $[0, 3, 2, 1, 5]$ die Charakteristik

$$+ + + - - + - - - - -,$$

also ist die Indexkette

$$- | + - | + | - + - + | - + | -$$

und der $\mathfrak{EK}$.: $\mathfrak{E}\{1, 3, 2, 5, 3, 2\}$.

Beim Übergang von der Indexkette zur reziproken Kette wird jeder innere (d. h. nicht einen Abschnitt schließende) Index zu einem letzten und jeder letzte Index zu einem inneren. Es hat daher die zur reziproken Kette gehörige Charakteristik gerade die entgegengesetzten Charaktere, wie die erste Charakteristik, folglich sind die entsprechenden Kettenbrüche zueinander reziprok; es besteht der Satz:

8. *Die zu reziproken Indexketten gehörenden Elementarkettenbrüche sind reziprok.*

Die explizite Darstellung des zum $\mathfrak{EK}$. $\mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \tau\}$ reziproken $\mathfrak{EK}$. ist nicht eben einfach und kann hier übergangen werden*).

Dagegen bestehen einfache Beziehungen zwischen den *Längen* l, l' und den *Ordnungen* m, m' von zwei reziproken Elementarkettenbrüchen. Zunächst sind die beiden reziproken Indexketten gleich lang, also

$$(13^a.) \qquad l - m = l' - m'.$$

Denkt man sich die beiden Ketten aufeinandergelegt, so fallen die Trennungsstriche der einen Kette zwischen die nicht getrennten Indices der andern, also ist ihre Anzahl in beiden Ketten zusammen:

$$m + m' = l - m - 1.$$

Hiernach ist die Ordnung des reziproken $\mathfrak{EK}$.

$$(13^b.) \qquad m' = l - 2m - 1$$

und die Länge

---

*) Es sei hierfür auf eine demnächst in der Mathematischen Zeitschrift erscheinende Arbeit „*Über Möbiuskettenbrüche und Elementarkettenbrüche*“ verwiesen.

(13°.) $$l' = 2l - 3m - 1.$$

Bis jetzt haben wir die durch einen ℰℜ. dargestellte Zahl als *positiv* angenommen. Wir können aber auch eine *negative* rationale Zahl in einen ℰℜ. entwickeln, und zwar auf zwei Arten. Seien a_0 und a_1 positive ganze Zahlen, so können wir entweder $-\frac{a_0}{a_1} = \frac{-a_0}{a_1}$ oder $= \frac{a_0}{-a_1}$ setzen. Bilden wir nun die Zahlenkette $[-a_0, a_1]$, so beginnt sie mit $-a_0 \mid a_1 \mid a_0 + a_1, a_0, a_1 \ldots$ geht also nach 3 Gliedern in die Kette $[a_0, a_1]$ über. Ist nun $\frac{a_0}{a_1} = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$, so ist also

(14). $$\frac{-a_0}{a_1} = \mathfrak{E}\{1, 1, \alpha + 1, \beta, \gamma, \ldots\}.$$

Vom dritten Näherungsbruch an sind alle Zähler negativ.

Dagegen beginnt die Kette $[a_0, -a_1]$ mit $a_0, -a_1 \mid a_0 + a_1 \mid a_0 + 2a_1, a_1$ $a_0 + a_1, a_0, a_1 \ldots$, also ist

$$\frac{a_0}{-a_1} = \mathfrak{E}\{2, 1, 2, \alpha + 1, \beta, \gamma, \ldots\}.$$

Vom vierten Näherungsbruch an sind alle Nenner negativ.

Von diesen beiden ℰℜ., die dieselbe Zahl darstellen, wollen wir nur den ersten als einen echten ℰℜ. ansehen. Ebenso können wir aber auch neben dem ℰℜ. für die positive rationale Zahl $\frac{a_0}{a_1}$ einen zweiten aufstellen, wenn wir $\frac{a_0}{a_1} = \frac{-a_0}{-a_1}$ setzen, also die Kette $[-a_0, -a_1]$ bilden. Wir haben dabei zwei Fälle zu unterscheiden. Ist $a_0 > a_1$, so beginnt die Kette mit $-a_0 \mid -a_1 \mid a_0 - a_1 \mid a_0, a_1, \ldots$, also ist

$$\frac{-a_0}{-a_1} = \mathfrak{E}\{1, 1, 1, \alpha, \beta, \gamma, \ldots\}.$$

Ist aber $a_0 < a_1$, so hat der ℰℜ. für $\frac{a_0}{a_1}$ die Form $\frac{a_0}{a_1} = \mathfrak{E}\{1, \alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ und die Kette $[-a_0, -a_1]$ beginnt mit $-a_0, -a_1 \mid a_1 - a_0 \mid 2a_1 - a_0, a_1, \ldots$ Man erhält also den zugehörigen ℰℜ., indem man dem ℰℜ. für $\frac{2a_1 - a_0}{a_1}$ $= 2 - \frac{a_0}{a_1}$ die Abschnitte 2, 1 vorsetzt. Es ist aber offenbar $2 - \frac{a_0}{a_1}$ $= \mathfrak{E}\{\alpha + 1, \beta, \gamma, \ldots\}$, folglich

$$\frac{-a_0}{-a_1} = \mathfrak{E}\{2, 1, \alpha + 1, \beta, \gamma, \ldots\}.$$

Auch die beiden letzten Formen wollen wir von der Betrachtung ausschließen; es ist also bei einem eigentlichen ℭℜ. entweder kein Abschnitt $= 1$ (wenn der Wert des ℭℜ. $a > 1$) oder nur der erste Abschnitt (wenn $0 < a < 1$) oder die beiden ersten Abschnitte (wenn $a < 0$ ist).

§ 3. Unendliche Elementarkettenbrüche.

Anstatt aus der Zahlenkette kann man einen Elementarkettenbruch auch durch den folgenden einfachen Algorithmus erhalten. Es sei ω eine reelle Zahl. Man bilde nacheinander die Zahlen

$$(1.) \qquad \omega_1 = \frac{1}{|\omega - 1|}, \; \omega_2 = \frac{1}{|\omega_1 - 1|}, \; \omega_3 = \frac{1}{|\omega_2 - 1|}, \cdots$$

Ist nun ω *positiv*, so folgt in der Reihe der Zahlen $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots$ stets auf eine Zahl, die < 1 ist, eine Zahl > 1. Man kann also die Reihe in Abschnitte von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Zahlen

$$(2.) \qquad \begin{array}{llll} \omega, & \omega_1, & \omega_2, \; \ldots & \omega_{\alpha-1}, \\ \omega_\alpha, & \omega_{\alpha+1}, & \omega_{\alpha+2}, \cdots & \omega_{\alpha+\beta-1}, \\ \omega_{\alpha+\beta}, \cdots & & & \omega_{\alpha+\beta+\gamma-1}, \\ & & \cdots & \end{array}$$

zerlegen, sodaß jeder Abschnitt mit einer Zahl < 1 schließt, während alle übrigen Zahlen > 1 sind. Mit diesen Zahlen bilde man den ℭℜ.

$$(3.) \qquad \mathfrak{C}\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\},$$

und in diesem sind sicher alle Abschnitte vom zweiten ab > 1.

Ist aber ω *negativ*, so ist $\omega_1 = \frac{1}{1-\omega} < 1$, es folgen also hier zwei Zahlen < 1 auf einander, sie bilden jede für sich einen Abschnitt und der zugehörige ℭℜ. hat die Form

$$(4.) \qquad \mathfrak{C}\{1, 1, \gamma, \delta, \ldots\},$$

worin alle Abschnitte vom dritten ab > 1 sind.

Wir beweisen nun den Satz:

1. *Ist ω eine rationale Zahl, so gelangt man in der Reihe der Zahlen $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots$ schließlich zu zwei aufeinanderfolgenden Zahlen $\omega_{l-2} = 2$, $\omega_{l-1} = 1$. Schließt man mit diesen die Reihe, so hat der zugehörige endliche ℭℜ. den Wert ω.*

Beweis. Ist ω *positiv* und gleich dem Quotienten $\frac{a_0}{a_1}$ von teilerfremden ganzen Zahlen, so ist

$$\omega_1 = \frac{a_1}{|a_0 - a_1|} = \frac{a_1}{a_2},\ \omega_2 = \frac{a_2}{|a_1 - a_2|} = \frac{a_2}{a_3}, \ldots,$$

also bilden $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine *Zahlenkette* $[a_0, a_1]$. Diese schließt mit $a_{l-2} = 2, a_{l-1} = 1$, also wird $\omega_{l-2} = \frac{a_{l-2}}{a_{l-1}} = 2$ und $\omega_{l-1} = \frac{1}{\omega_{l-2} - 1} = 1$. Die Gliederung der Kette $[a_0, a_1]$ stimmt offenbar mit der durch die Zahlen $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots$ erzeugten Gliederung $\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ überein, folglich hat der EK. (3.) den Wert $\frac{a_0}{a_1} = \omega$.

Ist ω *negativ*, so ist $\omega_1 = \frac{1}{1-\omega} < 1$, also gleich dem endlichen EK. $\omega_1 = \mathfrak{E}\{1, \gamma, \delta, \ldots\}$. Dann ist aber $\omega = 1 - \frac{1}{\omega_1}$ gleich dem EK. (4.). Damit ist der Satz bewiesen. *Die Zahlen* $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots$ *sind die vollständigen Quotienten des* EK.

Ist nun ω eine *irrationale Zahl*, so bricht die Reihe der Zahlen $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots$ nicht ab und der zugehörige EK. wird *unendlich.*

Ein unendlicher EK. *heiße konvergent, wenn seine eigentlichen Näherungsbrüche gegen einen endlichen Grenzwert konvergieren.*

Zur Untersuchung der Konvergenz eines unendlichen EK. betrachten wir die Differenzen von zwei Näherungsbrüchen $\frac{P_{i+x}}{Q_{i+x}} - \frac{P_i}{Q_i}$ für $x = 1, 2, 3, \ldots$ Es ist nach (8.) und (8ª.) in § 3:

$$\left|\frac{P_{i+x}}{Q_{i+x}} - \frac{P_i}{Q_i}\right| = \left|\frac{P_i x_{ix} \mp P_{i-1}}{Q_i x_{ix} \mp Q_{i-1}} - \frac{P_i}{Q_i}\right| = \frac{1}{Q_i (Q_i x_{ix} \mp Q_{i-1})},$$

wobei das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem $\frac{P_i}{Q_i}$ ein Näherungsbruch am Schluß eines Abschnitts ist oder nicht. Im ersten Falle ist immer $x_{ix} > 1$, also, da $Q_i - Q_{i-1} = Q_{i-2}$ ist:

$$\left|\frac{P_{i+x}}{Q_{i+x}} - \frac{P_i}{Q_i}\right| < \frac{1}{Q_i Q_{i-2}};$$

im zweiten Fall ist $x_{ix} > 0$, also

$$\left|\frac{P_{i+x}}{Q_{i+x}} - \frac{P_i}{Q_i}\right| < \frac{1}{Q_i\, Q_{i-1}}.$$

Es ist also der unendliche ℰℜ. jedenfalls konvergent, sobald die Nenner Q_i mit i über alle Grenzen wachsen. Das ist aber stets der Fall *mit der einen Ausnahme, daß die Nenner* $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ *die periodische Zahlenkette* 1, 1, 0, 1, 1, 0, ... *bilden.* Dies tritt nur bei zwei Elementarkettenbrüchen ein, nämlich $\mathfrak{E}\{2, 3, 3, 3, \ldots\}$ und $\mathfrak{E}\{1, 1, 3, 3, 3, \ldots\}$, und diese sind in der Tat *divergent*; die Näherungsbrüche des ersten gehen gegen $+\infty$, die des zweiten gegen $-\infty$. Es gilt also der Satz:

Ein unendlicher ℰℜ. *ist* — abgesehen von den beiden erwähnten Ausnahmen — *stets konvergent.* Man sieht leicht, daß für eine endliche Irrationalzahl ω der Algorithmus (1.) niemals auf die Gliederung $\{2, 3, 3, 3, \ldots\}$ oder $\{1, 1, 3, 3, 3, \ldots\}$ führen kann, also folgt:

3. *Der einer Irrationalzahl* ω *zugeordnete unendliche* ℰℜ. (3.) *oder* (4.) *ist stets konvergent und hat den Wert* ω.

Das letztere ergibt sich daraus, daß nach (1.) sich ω mit Hilfe der Näherungsbrüche des zugeordneten ℰℜ. durch die Ausdrücke $\omega = \frac{P_i\,\omega_i \mp P_{i-1}}{Q_i\,\omega_i \mp Q_{i-1}}$ darstellt und infolgedessen $\left|\omega - \frac{P_i}{Q_i}\right|$ gegen Null konvergiert.

Ein unendlicher ℰℜ. *kann einen rationalen Wert haben.* Man kann nämlich auch für ein rationales ω den Algorithmus (1.) unbegrenzt fortsetzen. An den Wert $\omega_{l-1} = 1$ schließt sich an:

$$\omega_l = \infty,\ \omega_{l+1} = 0,\ \omega_{l+2} = 1,\ \omega_{l+3} = \infty,\ \omega_{l+4} = 0, \ldots.$$

Ist nun

$$(5.) \qquad \omega = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \sigma, \tau\}$$

der endliche ℰℜ. für ω, so kann man entweder durch $\omega_l = \infty$ und $\omega_{l+1} = 0$ den letzten Abschnitt um zwei vermehren, und dann folgen unbegrenzt viele Abschnitte gleich 3, oder man hat durch ω_l und ω_{l+1} einen neuen Abschnitt $= 2$ und darauf lauter Abschnitte $= 3$, sodaß man für ω zwei unendliche Elementarkettenbrüche erhält:

$$(6.) \qquad \omega = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \sigma, \tau + 2, 3, 3, 3, \ldots\}$$

und

$$(7.) \qquad \omega = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \sigma, \tau, 2, 3, 3, 3, \ldots\}.$$

Beide ergeben in der Tat denselben Wert, wie der ℭℜ. (5.). Sei nämlich $\omega = \frac{a_0}{a_1}$ der Wert dieses ℭℜ., $\frac{b_0}{b_1}$ sein vorletzter Näherungsbruch, so folgen beim ℭℜ. (6.) auf $\frac{a_0}{a_1}$ die Näherungsbrüche

$$\frac{a_0+b_0}{a_1+b_1}, \frac{2a_0+b_0}{2a_1+b_1}; \frac{a_0}{a_1}, \frac{3a_0+b_0}{3a_1+b_1}, \frac{4a_0+b_0}{4a_1+b_1}; \frac{a_0}{a_1}, \frac{5a_0+b_0}{5a_1+b_1}, \frac{6a_0+b_0}{6a_1+b_1}; \ldots,$$

also ist der Wert des unendlichen ℭℜ. (6.):

$$\lim_{n=\infty} \frac{na_0+b_0}{na_1+b_1} = \frac{a_0}{a_1} = \omega.$$

Im ℭℜ. (7.) dagegen folgen auf $\frac{b_0}{b_1}$, $\frac{a_0}{a_1}$ die Näherungsbrüche

$$\frac{a_0-b_0}{a_1-b_1}, \frac{2a_0-b_0}{2a_1-b_1}; \frac{a_0}{a_1}, \frac{3a_0-b_0}{3a_1-b_1}, \frac{4a_0-b_0}{4a_1-b_1}; \frac{a_0}{a_1}, \frac{5a_0-b_0}{5a_1-b_1}, \frac{6a_0-b_0}{6a_1-b_1}; \ldots,$$

also ist auch hier der Wert des ℭℜ.

$$\lim_{n=\infty} \frac{na_0-b_0}{na_1-b_1} = \frac{a_0}{a_1} = \omega.$$

Es kann also ein endlicher ℭℜ. auf zwei Arten in einen unendlichen ℭℜ. verwandelt werden. Umgekehrt aber gilt der Satz:

4. *Ein unendlicher* ℭℜ. *hat dann und nur dann einen rationalen Wert, wenn von einer bestimmten Stelle an alle Abschnitte gleich 3 sind.*

Es muß nämlich, wenn $\omega = \frac{a_0}{a_1}$ ist, der Ausdruck

$$|Q_i\,\omega - P_i| = \frac{|Q_i\,a_0 - P_i\,a_1|}{a_1}$$

verschwinden, sobald er unter $\frac{1}{a_1}$ sinkt. Ist nun $\frac{P_i}{Q_i}$ nicht der letzte Näherungsbruch in einem Abschnitt, so ist

$$|Q_i\,\omega - P_i| = \frac{1}{Q_i\,\omega_i + Q_{i-1}},$$

also muß jedesmal, wenn $Q_i\,\omega_i + Q_{i-1} > a_1$ wird, $\omega_i = \infty$ sein. Der zu $\frac{P_i}{Q_i}$ gehörige vollständige Quotient ist also der oben gefundene divergente unendliche ℭℜ. $\omega_i = \mathfrak{C}\,|2, 3, 3, 3, \ldots|$, folglich hat dann der ℭℜ. für ω in

der Tat die Form (6.). Ist aber $\frac{P_i}{Q_i}$ der letzte Näherungsbruch in einem Abschnitt, so ist, da $Q_i = Q_{i-1} + Q_{i-2}$ ist:

$$|Q_i\,\omega - P_i| = \frac{1}{Q_i\,\omega_i - Q_{i-1}} = \frac{1}{Q_{i-1}(\omega_i - 1) + Q_{i-2}\,\omega_i},$$

und auch hier ergibt sich, sobald der Nenner $> a_1$ wird, $\omega_i = \infty$. Dies führt aber zu einem unendlichen ℭℜ. von der Form (7.).

Schließen wir also diese ℭℜ. mit der „Periode 3" von der Betrachtung aus, womit auch die beiden divergenten ℭℜ. ausgeschlossen sind, und nennen wir einen unendlichen ℭℜ., dessen Abschnitte nicht schließlich alle $= 3$ sind, *regulär*, so gilt der Satz:

5. *Ein regulärer ℭℜ. ist stets konvergent und stellt eine irrationale Zahl vor. Umgekehrt läßt sich eine irrationale Zahl immer nur auf eine Weise in einen unendlichen ℭℜ. verwandeln, und dieser ist stets regulär.*

Bei einem unendlichen ℭℜ. von *endlicher Ordnung*, also mit einer endlichen Anzahl von Abschnitten, ist der letzte Abschnitt unendlich lang, d. h. der ℭℜ. schließt mit dem gewöhnlichen Kettenbruch $[1, 1, 1, \ldots]$, der als ℭℜ. mit $\mathfrak{E}\{\infty\}$ zu bezeichnen ist. Sein Wert, den wir mit t bezeichnen wollen, ist

$$(8.) \qquad t = \mathfrak{E}\{\infty\} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Es ist also ein unendlicher ℭℜ. von endlicher Ordnung

$$\mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \tau, \infty\} = \frac{a_0\,t - b_0}{a_1\,t - b_1},$$

worin $\frac{b_0}{b_1}, \frac{a_0}{a_1}$ die beiden letzten Näherungsbrüche des endlichen ℭℜ. $\mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \tau\}$ bezeichnen, und es besteht der Satz:

6. *Jeder unendliche ℭℜ. von endlicher Ordnung ist arithmetisch äquivalent mit der quadratischen Irrationalzahl t.*

Die Umkehrung dieses Satzes kann hier noch nicht in präziser Weise formuliert werden (vgl. § 5, Satz 11.).

Ein Abschnitt der durch den Algorithmus (1.) bestimmten Zahlen

ω_i bestehe aus den Zahlen $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots \omega^{(\nu)}$, sodaß also $\omega^{(\nu)} < 1$, die übrigen Zahlen > 1 sind. Es ist dann

$$(9.) \qquad \omega^{(\nu-1)} = 1 + \frac{1}{\omega^{(\nu)}}; \; \omega^{(\nu-2)} = 1 + \frac{1}{\omega^{(\nu-1)}}; \dots \; \omega^{(1)} = 1 + \frac{1}{\omega^{(2)}}.$$

Damit $\omega^{(\nu)}$ in das Intervall $0 < \omega^{(\nu)} < 1$ hineinfällt, muß jede der vorhergehenden Zahlen in einem bestimmten Intervall liegen. Diese Intervalle sind alle voneinander getrennt und sind in folgender Weise festgelegt:

Es seien

$$p_0 = 0, \; p_1 = 1, \; p_2 = 1, \; p_3 = 2, \; p_4 = 3, \; p_5 = 5, \; p_6 = 8, \dots$$

die bekannten Fibonaccischen Zahlen mit dem Bildungsgesetz

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2}.$$

Ihre Verhältnisse $\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_1}, \frac{p_3}{p_2}, \dots$ sind die Näherungsbrüche des eben erwähnten Kettenbruchs $\mathfrak{E}\{\infty\} = t = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, und sie begrenzen Intervalle $I_1, I_2, I_3, \dots$, welche immer kleiner werdend von beiden Seiten gegen den Grenzpunkt t konvergieren. Das m^{te} Intervall ist

$$(10.) \qquad I_m = \left(\frac{p_m}{p_{m-1}}, \; \frac{p_{m+2}}{p_{m+1}}\right).$$

Hierunter ist mit $p_{-1} = 1$ auch das Intervall $(0, 1)$ als I_0 einbegriffen.

Aus den Formeln (9.) folgt dann der Satz:

7. *Damit* $0 < \omega^{(\nu)} < 1$ *ist, müssen die Zahlen* $\omega^{(\nu-m)}$ *für* $m = 1, 2, 3, \dots$ *jeweils im Intervall* I_m *liegen.*

Oder anders ausgedrückt:

8. *Liegt eine Zahl* ω_i *im Intervall* I_m, *so folgen auf sie im gleichen Abschnitt noch* m *Zahlen, welche der Reihe nach in den Intervallen* $I_{m-1}, I_{m-2}, \dots I_1, I_0$ liegen.

§ 4. Elementarkettenbrüche und lineare Substitutionen.

Es sei $\frac{P_i}{Q_i} = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \dots \mu\}$ ein Näherungsbruch der $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$.-Entwicklung einer Größe x; der zugehörige vollständige Quotient sei y, also

$$x = \frac{P_i y \mp P_{i-1}}{Q_i y \mp Q_{i-1}},$$

je nachdem $\frac{P_i}{Q_i}$ der Näherungsbruch am Schluß eines Abschnitts ist oder nicht. Wir schreiben dann den $\mathfrak{EK}$. für x im einen oder anderen Fall in der Form

$$(2.) \qquad x = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \lambda, \mu \parallel y\}$$

oder

$$(3.) \qquad x = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \lambda, \mu \mid y\}.$$

Die Zahlen x und y sind durch eine ganzzahlige Substitution von der Determinante ± 1 mit einander verknüpft. Diese läßt sich aus *zwei Fundamentalsubstitutionen* $x' = 1 + \frac{1}{x}$ und $x' = 1 - \frac{1}{x}$ oder

$$(4.) \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

zusammensetzen, und die Zusammensetzung ist durch den $\mathfrak{EK}$., unmittelbar gegeben. Es ist nämlich auf Grund der Bildungsweise der $\mathfrak{EK}$., je nachdem zwischen x und y die Beziehung (2.) oder (3.) besteht:

$$(5.) \qquad x = U^{\alpha-1} V U^{\beta-1} V \ldots U^{\mu-1} V (y) \text{ oder}$$

$$(6.) \qquad x = U^{\alpha-1} V U^{\beta-1} V \ldots U^{\mu} (y).$$

Wir nennen eine Substitution*) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, die sich allein aus den Substitutionen U und V zusammensetzt, eine *gerade Substitution* und haben den Satz:

1. *Der Wert des $\mathfrak{EK}$. ist mit irgend einem vollständigen Quotienten durch eine gerade Substitution verknüpft.*

Für die Fundamentalsubstitutionen U und V gelten die Beziehungen**):

$$(7.) \qquad V^3 = 1, \text{ also } V^{-1} = V^2,$$

$$UV^2\, UV^2 = 1, \text{ also}$$

---

*) Eine Verwechslung der Substitutionskoeffizienten α, β mit den gleich bezeichneten Abschnitten des $\mathfrak{EK}$. ist wohl nicht zu befürchten.

**) Dabei werden $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix}$ als identisch angesehen.

(8.) $$V = UV^2U,\ U^{-1} = V^2UV^2.$$

Man sieht ohne weiteres:

2. *Die geraden Substitutionen bilden eine Gruppe.*

Infolge von (7.) und (8.) kann jede gerade Substitution auf eine solche Form gebracht werden, daß sie die Potenzen von U nur mit positiven Exponenten und zwischen ihnen nur die erste Potenz von V enthält, d. h. *sie läßt sich stets auf eine der Formen* (5.) *oder* (6.) *reduzieren.* Darin kann $\alpha = 1$ oder gleichzeitig $\alpha = 1$, $\beta = 1$ sein; dann beginnen die Substitutionen mit V oder V^2. Ferner kann in (5.) auch $\mu = 1$ sein; dann schließt die Substitution mit V^2. Die übrigen Zahlen $\gamma, \delta, \ldots \lambda$ sind *sämtlich größer als 1.* Dies entspricht den früheren Festsetzungen über die Elementarkettenbrüche, wonach nur die beiden ersten Abschnitte und der letzte Abschnitt gleich 1 sein sollen. Solche $\mathfrak{EK}$. wollen wir jetzt normal nennen. Wir können nun aber auch $\mathfrak{EK}$. betrachten, bei denen einzelne innere Abschnitte gleich 1 sind, und können sie, indem wir sie mit den linearen Substitutionen in Beziehung setzen, in normale $\mathfrak{EK}$. verwandeln. Es mögen also im $\mathfrak{EK}$. die Abschnitte $\varkappa$, 1, λ aufeinanderfolgen, wobei $\varkappa$ und $\lambda > 1$ sind. Ihnen entspricht in der zugeordneten Substitution das Produkt $U^{\varkappa-1}VVU^{\lambda-1}V$ oder nach (8.): $U^{\varkappa-2}VU^{\lambda-2}V$, folglich ist

(9.) $$\mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \varkappa, 1, \lambda, \ldots\} = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \varkappa - 1, \lambda - 1, \ldots\}.$$

Sind aber zwei aufeinanderfolgende innere Abschnitte gleich 1, so entspricht den Abschnitten $\varkappa$, 1, 1, λ das Produkt $U^{\varkappa-1}VV^2U^{\lambda-1}V = U^{\varkappa+\lambda-2}V$, also ist

(10.) $$\mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \varkappa, 1, 1, \lambda, \ldots\} = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \varkappa + \lambda - 1, \ldots\}.$$

Sind drei aufeinanderfolgende innere Abschnitte gleich 1, so entspricht dies dem Produkt $U^{\varkappa-1}VV^3U^{\lambda-1}V = U^{\varkappa-1}VU^{\lambda-1}V$, d. h. es ist

(11.) $$\mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \varkappa, 1, 1, 1, \lambda, \ldots\} = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \varkappa, \lambda, \ldots\}.$$

Auf diese drei Fälle läßt sich die Reduktion aller nicht normalen $\mathfrak{EK}$. zurückführen. So ist z. B. nach (9.) und (11.)

$$\mathfrak{E}\{3, 1, 2, 1, 1, 4\} = \mathfrak{E}\{2, 1, 1, 1, 4\} = \mathfrak{E}\{2, 4\}$$

oder nach (10.) und (9.)

$$\mathfrak{E}\{3, 1, 2, 1, 1, 4\} = \mathfrak{E}\{3, 1, 5\} = \mathfrak{E}\{2, 4\}.$$

Es seien nun x und x' zwei irrationale Zahlen, deren $\mathfrak{EK}$. von einer

bestimmten Stelle an übereinstimmen, also einen vollständigen Quotienten y gemeinsam haben. Dann folgt aus Satz 1, daß x und x' durch eine gerade Substitution verknüpft sind. Zwei solche Zahlen nennen wir *gerade-äquivalent.* Es besteht also der Satz:

3. *Zwei irrationale Zahlen, deren* $\mathfrak{EK}$*.-Entwicklungen von einer bestimmten Stelle an übereinstimmen, sind gerade-äquivalent.*

Es gilt aber auch die Umkehrung dieses Satzes. Sind x und x' gerade-äquivalent, so ist entweder

$$(12.) \quad x' = U^{\alpha-1} V U^{\beta-1} V \ldots U^{\mu-1} V (x) = \mathfrak{E}\,|\alpha, \beta, \ldots \mu \,\|\, x|$$

oder

$$(12^a.) \quad x' = U^{\alpha-1} V U^{\beta-1} V \ldots U^{\mu} (x) = \mathfrak{E}\,|\alpha, \beta, \ldots \mu \,|\, x|;$$

wir haben also den Satz:

4. *Sind zwei Zahlen gerade-äquivalent, so stimmen ihre* $\mathfrak{EK}$*.-Entwicklungen von einer bestimmten Stelle an überein.*

Es kann dabei stets erreicht werden, daß die eine Zahl ein vollständiger Quotient in der $\mathfrak{EK}$.-Entwicklung der anderen Zahl ist.

Es seien nun x und x' irgendwie äquivalent, d. h. es sei

$$(13.) \qquad x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

mit vier ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von der Determinante $\varepsilon = \pm 1$. In der Entwicklung von x in einen normalen $\mathfrak{EK}$. sei $\frac{P_i}{Q_i}$ ein Näherungsbruch am Schluß eines Abschnitts, y der zugehörige vollständige Quotient, dann ist

$$x = \frac{P_i y - P_{i-1}}{Q_i y - Q_{i-1}} \text{ und}$$

$$P_i Q_{i-1} - P_{i-1} Q_i = \partial_i = \pm 1.$$

Dies in (13.) eingeführt gibt

$$(14.) \qquad x' = \frac{Ay - B}{Cy - D}, \text{ worin}$$

$$A = \alpha P_i + \beta Q_i, \quad B = \alpha P_{i-1} + \beta Q_{i-1},$$
$$C = \gamma P_i + \delta Q_i, \quad D = \gamma P_{i-1} + \delta Q_{i-1},$$

und es ist

$$AD - BC = \varepsilon\partial_i = \pm 1.$$

Es seien nun zunächst x und x' positiv und die Vorzeichen von α, β, γ, δ so gewählt, daß $\alpha x + \beta$, also auch $\gamma x + \delta$ positiv ist. Dann werden bei genügend großem i die Zahlen A, B, C, D positiv, und es wird

$$A > B, \quad C > D.$$

In dem $\mathfrak{EK}$. für $\frac{A}{C}$ sei $\frac{B'}{D'}$ der vorletzte Näherungsbruch. Dann können *zwei Fälle* eintreten:

1. Es ist

$$AD' - B'C = AD - BC,$$

und dann folgt in bekannter Weise, daß

$$B' = B, \quad D' = D$$

sein muß, also ist nach (14.) y auch ein vollständiger Quotient der $\mathfrak{EK}$.-Entwicklung von x', folglich sind x *und* x' *gerade-äquivalent.*

2. Es ist

$$AD' - B'C = -AD + BC, \text{ also}$$

$$A(D + D') = C(B + B'),$$

und hieraus folgt, da $B + B' < 2A$, $D + D' < 2C$ ist, daß

$$B + B' = A, \; D + D' = C$$

sein muß. Es ist dann also $\frac{B}{D}$ *der dem Bruch* $\frac{B'}{D'}$ *vorangehende Näherungsbruch;* dies ist aber zugleich der dem Bruch $\frac{A}{C}$ folgende *überzählige Näherungsbruch,* d. h. ist

$$\frac{A}{C} = \mathfrak{E}\{a, b, \ldots n\},$$

so ist

$$\frac{B}{D} = \mathfrak{E}\{a, b, \ldots n, 1\}.$$

Nach (14.) ist dann

$$x' = \frac{B \cdot \frac{1}{y} - A}{D \cdot \frac{1}{y} - C},$$

und daraus schließt man, daß in der $\mathfrak{EK}$.-Entwicklung von x' der Bruch $\frac{B}{D}$ ein Näherungsbruch am Schluß eines Abschnitts und $\frac{1}{y}$ der zugehörige vollständige Quotient ist. Wir nennen in diesem Fall x und x' *ungerade-äquivalent*.

Ist

$$y = \mathfrak{E}\{\nu, \pi, \varrho, \sigma, \ldots\},$$

so hat der reziproke $\mathfrak{EK}$., da $\nu > 1$ ist, die Form

$$\frac{1}{y} = \mathfrak{E}\{1, \nu', \pi', \varrho', \ldots\},$$

also wird

$$x' = \mathfrak{E}\{a, b, \ldots n, 1, 1, \nu', \pi', \varrho', \ldots\}$$

oder nach (10.)

$$x' = \mathfrak{E}\{a, b, \ldots n + \nu' - 1, \pi', \varrho', \ldots\}. \tag{15.}$$

Es besteht also der Satz:

5. *Sind zwei Zahlen ungerade-äquivalent, so sind ihre $\mathfrak{EK}$.-Entwicklungen von einer bestimmten Stelle an zueinander reziprok.*

Der Satz bleibt bestehen, wenn eine oder beide Zahlen negativ sind, denn es ist $-x$ zu x gerade-äquivalent vermöge der Substitution V^2U, sodaß $-x = \mathfrak{E}\{1, 1, 1 | x\}$. Ist nun z. B. nur x negativ, so gilt der Satz für $-x$ und x', folglich auch für x und x'.

Zwei ungerade-äquivalente Zahlen sind durch eine *ungerade Substitution* miteinander verknüpft. Es ist

$$x = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \mu \parallel y\},$$

$$x' = \mathfrak{E}\{a, b, \ldots m \parallel \frac{1}{y}\}, \tag{16.}$$

also, wenn wir als neue Fundamentalsubstitution die *reziproke Transformation*

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{17.}$$

einführen:

$$x = U^{a-1} V U^{\beta-1} V \ldots U^{\mu-1} V (y),$$
$$x' = U^{a-1} V U^{b-1} V \ldots U^{m-1} V R (y).$$

Durch Umkehrung der ersten Substitution erhält man, wenn man zur Abkürzung

$$V(UV)^{a-1}V = T_a$$

setzt:

$$y = T_\mu T_\lambda \dots T_\beta T_a (x)$$

und damit

$$x' = U^{a-1}V \dots U^{m-1}V\,R\,T_\mu \dots T_a(x), \tag{18.}$$

d. h. *eine ungerade Substitution setzt sich aus den drei Substitutionen U, V, R zusammen.*

Die vorliegende Substitution läßt sich bedeutend vereinfachen. Für die Substitution R gelten die Beziehungen

$$\begin{gathered} R^2 = 1, \text{ also } R^{-1} = R \\ RUR = VU,\ RVR = V^2,\ RV^2R = V. \end{gathered} \tag{19.}$$

Hieraus schließt man sofort den Satz:

6. *Jede aus U, V, R zusammengesetzte Substitution, die eine gerade Anzahl von Substitutionen R enthält, läßt sich allein durch U und V ausdrücken, ist also eine gerade Substitution.*

Es läßt sich also eine ungerade Substitution aus den Substitutionen U, V und *einer* Substitution R zusammensetzen, und man kann stets erreichen, daß die Substitution R am Ende steht. Um (18.) in dieser Weise umzuformen, bilden wir mit Benutzung von (19.)

$$R(UV)R = RURRVR = VUV^2,$$

ferner

$$RT_\mu R = RVRR(\overset{1}{\smile}{UV})R \dots R(\overbrace{UV}^{\mu-1})RRVR = U^{\mu-1}V,$$

folglich

$$RT_\mu \dots T_a = U^{\mu-1}V\,U^{\lambda-1}V \dots U^{a-1}VR.$$

Damit wird (18.):

$$x' = U^{a-1}V \dots U^{m-1}V\,U^{\mu-1}V \dots U^{a-1}VR\,(x).$$

Hieraus schließt man:

7. *Haben zwei ungerade-äquivalente Zahlen die in* (16.) *angegebenen* $\mathfrak{EK}$.*-Entwicklungen, so ist*

$$(20.) \qquad x' = \mathfrak{E}\{a, b, \ldots m, \mu, \lambda, \ldots \beta, \alpha \| \frac{1}{x}\}$$

und umgekehrt, wie man leicht sieht:

$$(20^a.) \qquad x = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \mu, m, \ldots b, a \| \frac{1}{x'}\}.$$

Es ist nun auch sofort zu sehen, daß *jede* aus U, V und *einer* Substitution R zusammengesetzte Substitution eine ungerade Substitution ist. Eine derartige Substitution läßt sich immer auf eine der beiden Formen

$$x' = U^{a-1} V \ldots U^{\mu-1} VR(x),$$
$$x' = U^{a-1} V \ldots U^{\mu} R(x)$$

bringen. Diese entsprechen den $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$.

$$x' = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \mu \| \frac{1}{x}\}$$

und

$$x' = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \mu \| \frac{1}{x}\} = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \mu + 1, 1, 1 \| \frac{1}{x}\},$$

d. h. es sind in der Tat x und x' ungerade-äquivalent.

Zusammenfassend können wir sagen:

8. Alle ganzzahligen linearen Substitutionen von der Determinante ± 1 zerfallen in zwei Arten: Gerade Substitutionen, die sich allein aus den Fundamentalsubstitutionen U und V, und ungerade Substitutionen, die sich aus U, V und *einer* Substitution R zusammensetzen. Die geraden Substitutionen bilden eine Gruppe, zwei ungerade Substitutionen geben zusammengesetzt eine gerade Substitution. Die $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$.-Entwicklungen von zwei äquivalenten Zahlen stimmen entweder von einer bestimmten Stelle an überein oder sie sind von einer bestimmten Stelle an reziprok, je nachdem die Zahlen durch eine gerade oder ungerade Substitution miteinander verknüpft sind*).

---

*) Vgl. hierzu meine Arbeit „*Über Möbiuskettenbrüche und Elementarkettenbrüche*", Math. Zeitschr. Bd. 3.

Bei dieser Einteilung der linearen Substitutionen in zwei Arten kommt die Scheidung in eigentliche (Determinante + 1) und uneigentliche Substitutionen (Determinante — 1) nicht zum Ausdruck. Dies gelingt aber in sehr übersichtlicher Weise, wenn wir an Stelle von U die Substitution $x' = -x$ oder

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = V^2 U$$

und an Stelle von R die Substitution $x' = -\frac{1}{x}$ oder

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = NR$$

einführen. Dann ist

$$N^2 = 1,\ T^2 = 1,\ V^3 = 1,$$

ferner

$$TNT = N,\ NTN = T,$$
$$NVN = TV^2T,\ NV^2N = TVT,$$

und es besteht der Satz:

9. Alle ganzzahligen linearen Substitutionen von der Determinante ± 1 lassen sich aus den drei zyklischen Substitutionen N, V, T zusammensetzen. Jede Substitution mit einer geraden Anzahl von T läßt sich durch N und V, jede Substitution mit einer geraden Anzahl von N läßt sich durch T und V ausdrücken.

Dies führt in doppelter Weise zu einer Einteilung der linearen Substitutionen.

I. *Gerade* Substitutionen nur aus V und N zusammengesetzt.
Ungerade „ „ „ V, N und *einer* Substitution T zusammengesetzt.

II. *Eigentliche* Substitutionen nur aus V und T zusammengesetzt.
Uneigentliche „ „ „ V, T und *einer* Substitution N zusammengesetzt.

Die *Translation* $x' = x + 1$ oder $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist eine ungerade Substitution, denn es ist

(21.) $$S = VT = UR.$$

Ein einfaches Kennzeichen für gerade Substitutionen hat man in dem folgenden Satz, auf den mich Herr *J. Schur* aufmerksam gemacht hat:

10. *Die Gruppe der geraden Substitutionen stimmt überein mit der Gruppe der Substitutionen, die mod 2 einer der Substitutionen*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, V^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

kongruent sind.

Ist nämlich $\mathfrak{B}$ die Gruppe der geraden Substitutionen, $\mathfrak{B}'$ die in dem Satz genannte Gruppe, so ist $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}'$ enthalten, da die Substitutionen V und N in $\mathfrak{B}'$ enthalten sind. Daß beide Gruppen identisch sind, folgt einfach daraus, daß $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ Untergruppen vom Index 2 in der Gruppe aller ganzzahligen unimodularen Substitutionen sind.

Es ist also $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ eine gerade Substitution, wenn entweder β *und* γ *gerade* oder α, β, γ *ungerade* oder β, γ, δ *ungerade* sind.

Zugleich ergibt sich, daß die ungeraden Substitutionen diejenigen sind, die mod 2 einer der Substitutionen

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, TV = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, TV^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kongruent sind.

Aus Satz 10. schließt man sofort den folgenden Satz, dessen sehr einfache Begründung ich ebenfalls Herrn *J. Schur* verdanke.

11. *Jede eigentliche Substitution von der Form* $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$ *ist eine ungerade Substitution.*

Es könnte nämlich die Substitution nur gerade sein, wenn β und γ gerade sind. Dann wäre aber $\alpha^2 = -\beta\gamma - 1 \equiv 3 \bmod 4$, was unmöglich ist.

Zur Theorie der Fundamentalgleichung.

Von Herrn *Michael Bauer* in Budapest.

§ 1.

1) Es sei K ein algebraischer Zahlkörper n-ten Grades. Wenn die ganzen Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ eine Basis des Körpers bilden, dann ist

$$\tau = t_1 \omega_1 + t_2 \omega_2 + \cdots + t_n \omega_n$$

die Fundamentalform, und die Gleichung

$$F(x; t_1, t_2, \ldots, t_n) = N(x - \tau) = 0$$

bildet die Fundamentalgleichung. *K. Hensel**) hat zum erstenmal die folgende grundlegende Tatsache vollständig bewiesen: Wenn im Körper K die Zerfällung

$$p = \mathfrak{p}_1^{g_1} \mathfrak{p}_2^{g_2} \ldots \mathfrak{p}_k^{g_k}$$

statthat, wo $\mathfrak{p}_i$ verschiedene Primideale f_i-ten Grades bedeuten, dann ist

(I.) $$F(x; t_1, t_2, \ldots, t_n) \equiv P_1^{g_1}(x; t_1, t_2, \ldots, t_n) \ldots P_k^{g_k}(x; t_1, t_2, \ldots, t_n) \pmod{p},$$

wo $P_i \pmod{p}$ verschiedene einfache**) und irreduzible Polynome f_i-ten Grades bezeichnen. In den folgenden Zeilen werde ich zeigen, daß $F(x; t_1, t_2, \ldots, t_n)$ auch nach dem Modul p^α, $\alpha > 1$ in eindeutiger Weise als ein Produkt von einfachen und (mod. p^α) irreduziblen Polynomen darstellbar ist. Es wird für $\alpha > 1$ die Kongruenz

---

*) Untersuchung der Fundamentalgleichung einer Gattung usw. Dieses Journal, Bd. 113, S. 61.

**) D. h. der höchste Koeffizient in x ist gleich Eins.

(II.) $F(x; t_1, t_2, \ldots, t_n) \equiv Q_{1\alpha}(x; t_1, t_2, \ldots, t_n) \ldots Q_{k\alpha}(x; t_1, t_2, \ldots, t_n) \pmod{p^\alpha}$ gelten, wo $Q_{i\alpha} \pmod{p^\alpha}$ verschiedene einfache, irreduzible Polynome bedeuten, welche noch die Relationen

$$(\text{II}^*.) \qquad Q_{i\alpha}(x; t_1, t_2, \ldots, t_n) \equiv P_i^{q_i}(x; t_1, t_2, \ldots, t_n) \pmod{p} \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

erfüllen.

2) Nun sei im Körper K jede Primzahl p mindestens durch zwei verschiedene Primideale teilbar. Wenn die ganze Zahl ω des Körpers der irreduziblen Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0; \; a_i \text{ rat. ganze Zahl},$$

genügt, so folgt aus (II.) die Reduzibilität des Polynoms $f(x)$ nach jedem Modul p^α. Auf solches Verhalten irreduzibler Polynome hat zum erstenmal *H. Hilbert**) hingewiesen; im § 2 werden Beispiele dieser Art *ohne* Anwendung der Idealtheorie gegeben.

3) Ein einfaches Polynom in x

$$G(x; t_1, t_2, \ldots, t_s) = x^m + A_1(t_1, t_2, \ldots, t_s) x^{m-1} + \cdots + A_m(t_1, t_2, \ldots, t_s),$$

dessen Koeffizienten ganzzahlige Polynome der Unbestimmten $t_1, t_2, \ldots, t_s$ sind, wird $(\text{mod. } p^\alpha)$ irreduzibel genannt, wenn es nicht als ein Produkt von einfachen Polynomen darstellbar ist. Zunächst soll der folgende Hilfsatz abgeleitet werden, der einen Satz von *Schönemann***) verallgemeinert.

Wenn die Polynome R_1, R_2, S_1, S_2 einfach sind und R_1, R_2 bzw. $S_1, S_2 \pmod{p}$ relativ prim gegeneinander ausfallen, dann folgen aus den Annahmen

$$R_1(x; t_1, t_2, \ldots, t_s) R_2(x; t_1, t_2, \ldots, t_s) \equiv S_1(x; t_1, t_2, \ldots, t_s) S_2(x; t_1, t_2, \ldots, t_s) \pmod{p^\alpha},$$

$$(1.) \qquad \begin{aligned} R_1(x; t_1, t_2, \ldots, t_s) &\equiv S_1(x; t_1, t_2, \ldots, t_s) \pmod{p}, \\ R_2(x; t_1, t_2, \ldots, t_s) &\equiv S_2(x; t_1, t_2, \ldots, t_s) \pmod{p}, \end{aligned}$$

die Relationen

---

*) Über Diophantische Gleichungen. Göttinger Nachr. 1897, S. 48. Vgl. auch die Note: Zur Theorie der höheren Kongruenzen. Math. und Naturw. Berichte aus Ungarn Bd. 20, S. 39. Aus *Hensels* „Theorie der alg. Zahlen" ist ersichtlich, daß die oben angegebene hinreichende Bedingung auch *notwendig* ist.

**) Von denjenigen Moduln, welche Potenzen von Primzahlen sind. Dieses Journal Bd. 32, S. 93, § 58 der Abhandlung.

$$(1^*.)\qquad \begin{aligned} R_1(x; t_1, t_2, \ldots, t_s) &\equiv S_1(x; t_1, t_2, \ldots, t_s) \pmod{p^\alpha}, \\ R_2(x; t_1, t_2, \ldots, t_s) &\equiv S_2(x; t_1, t_2, \ldots, t_s) \pmod{p^\alpha}. \end{aligned}$$

Es sind nämlich

$$(2.)\qquad \begin{aligned} S_1(x; t_1, t_2, \ldots, t_s) &= R_1(x; t_1, t_2, \ldots, t_s) + p^\gamma M_1(x; t_1, t_2, \ldots, t_s), \\ S_2(x; t_1, t_2, \ldots, t_s) &= R_2(x; t_1, t_2, \ldots, t_s) + p^\gamma M_2(x; t_1, t_2, \ldots, t_s), \end{aligned}$$

wo die Grade von M_1 bzw. M_2 kleiner als die Grade von R_1 bzw. R_2 ausfallen. Wenn wir $\gamma < \alpha$ voraussetzen, dann folgt aus

$$R_1 R_2 \equiv R_1 R_2 + p^\gamma (R_1 M_2 + R_2 M_1) + p^{2\gamma} M_1 M_2 \pmod{p^\alpha}$$

die Relation

$$M_1 R_2 + M_2 R_1 \equiv 0 \pmod{p},$$

woraus — da $R_1, R_2 \pmod{p}$ relativ prim sind — die Relationen

$$(3.)\qquad \begin{gathered} f_1(t_1, t_2, \ldots, t_s)\, M_1(x; t_1, t_2, \ldots, t_s) \equiv 0 \pmod{p, R_1(x; t_1, t_2, \ldots, t_s)}, \\ f_2(t_1, t_2, \ldots, t_s)\, M_2(x; t_1, t_2, \ldots, t_s) \equiv 0 \pmod{p, R_2(x; t_1, t_2, \ldots, t_s)}, \\ f_1(t_1, t_2, \ldots, t_s) \not\equiv 0 \pmod{p}, \; f_2(t_1, t_2, \ldots, t_s) \not\equiv 0 \pmod{p} \end{gathered}$$

folgen. Da noch die Grade von M_1 bzw. M_2 die angegebene Eigenschaft besitzen, ergeben sich aus (3.) die Kongruenzen

$$(3^*.)\qquad M_1(x; t_1, t_2, \ldots, t_s) \equiv 0 \pmod{p}, \; M_2(x; t_1, t_2, \ldots, t_s) \equiv 0 \pmod{p},$$

infolgederen $\gamma \geqq \alpha$ ist, q. e. d. Der Hilfsatz wird noch gelten, wenn die Anzahl der Polynome R bzw. S beliebig groß ausfällt. Bei *Schönemann* sind keine Unbestimmten $t_1, t_2, \ldots, t_s$ vorhanden, in diesem Falle besteht noch der folgende Satz*): Ein einfaches, nach dem Modul p^α irreduzibles Polynom ist nach dem Modul p entweder irreduzibel oder die Potenz eines irreduziblen Polynoms. Im allgemeinen Falle ist dieser Satz nicht richtig, das Polynom

$$G(x; t_1, t_2) = (x - t_1)(x - t_2) + p;$$

ist, wie man sich leicht überzeugt, nach dem Modul p^2 irreduzibel, trotzdem die Polynome $x - t_1, x - t_2$ nach dem Modul p relativ prim gegeneinander ausfallen.

4) Kehren wir zur Fundamentalgleichung zurück. Es sei eine beliebige Zerfällung in Primfaktoren nach dem Modul p:

---

*) A. a. O. § 59. Zum Beweise wendet *Schönemann* das Resultat von § 58 an. Man kann den Satz auch unabhängig beweisen.

(4.) $F(x; t_1, t_2, \ldots, t_n) \equiv P_1^{g_1}(x; t_1, t_2, \ldots, t_n) \ldots P_k^{g_k}(x; t_1, t_2, \ldots, t_n) \pmod{p}$,

und es soll

(4*.) $$F - P_1^{g_1} \ldots P_k^{g_k} = p\, N(x; t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

gesetzt werden.

Da der größte gemeinsame Teiler von p und der Form $P_l(\tau; t_1, t_2, \ldots, t_n)$ das Primideal $\mathfrak{p}_l$ ist, so folgt aus der Theorie der Fundamentalgleichung

(5.) $N(x; t_1, t_2, \ldots, t_n) \not\equiv 0 \pmod{p, P_l(x; t_1, t_2, \ldots, t_n)}$,

vorausgesetzt, daß

$$g_l > 1$$

ausfällt. Nun sei $S(x; t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ein einfaches, nach dem Modul p^α irreduzibles Polynom, welches $F(x; t_1, t_2, \ldots, t_n) \pmod{p^\alpha}$, $\alpha > 1$ teilt. Wir werden zeigen, daß aus der Annahme

(6.) $S(x; t_1, t_2, \ldots, t_n) \equiv 0 \pmod{p, P_l(x; t_1, t_2, \ldots, t_n)}$

die Relation

(6*.) $S(x; t_1, t_2, \ldots, t_n) \equiv 0 \pmod{p, P_l^{g_l}(x; t_1, t_2, \ldots, t_n)}$

folgt. Wäre dem nicht so, dann würden — weil die Zerfällungen $\pmod{p}$ eindeutig sind — Relationen von der Gestalt

$$g_l = g_{l1} + g_{l2}, g_{l1} > 0, g_{l2} > 0,$$
$$F(x; t_1, t_2, \ldots, t_n) \equiv (P_l^{g_{l1}} \Psi_1 + p H_1)(P_l^{g_{l2}} \Psi_2 + p H_2) \pmod{p^\alpha}$$

bestehen, woraus

$$F(x; t_1 t_2, \ldots, t_n) \equiv 0 \pmod{p^2, P_l},$$
$$p N(x; t_1, t_2, \ldots, t_n) \equiv 0 \pmod{p^2, P_l}, N(x; t_1 t_2, \ldots, t_n) \equiv \pmod{p, P_l}$$

folgen im Widerspruche mit der Tatsache (5.).

5) Zum Beweise der Behauptungen (II.) und (II*.) ist nur zu zeigen, daß eine gewisse Zerfällung von der Gestalt (II.) mit den Eigenschaften (II*.) existiert. Es sei nämlich $V(x; t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ein einfaches, nach dem Modul p^α irreduzibles Polynom, welches in einer beliebigen Zerfällung $\pmod{p^\alpha}$ auftritt. Nach dem Vorhergehenden ist $V \pmod{p}$ entweder mit einer Potenz $P_i^{g_i}$ oder mit dem Produkte von mehreren $P_i^{g_i}, P_h^{g_h}, \ldots$ kongruent. Die zweite Möglichkeit kann nach dem Hilfsatze nicht eintreten, es bleibt nur die erste. Der Eindeutigkeits-Beweis der Zerfällung wird wieder durch den Hilfsatz geleistet.

6) Aus den Untersuchungen von *Landsberg**) kann leicht die Existenz der gesuchten Zerfällung gefolgert werden. Es soll im *Galois*schen Körper G von K die Zerfällung

$$p = (\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_e)^g$$

statthaben, wo $\mathfrak{P}_i$ verschiedene Primideale f_i-ten Grades bedeuten. Wenn $\mathfrak{H}$ die Zerlegungsgruppe einer der Primfaktoren $\mathfrak{P}$ ist, dann wird im Zerlegungskörper**)

$$F(x; t_1, t_2, \dots, t_n) = \bar{Q}_1(x; t_1, t_2, \dots, t_n) \dots \bar{Q}_k(x; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

ausfallen, wo $\bar{Q}_i$ einfache, im Zerlegungskörper irreduzible Polynome sind, deren numerische Koeffizienten ganze Zahlen desselben Körpers bilden. Nun ist nach *H. Hilbert*

$$p = \bar{\mathfrak{p}}\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{P}^g, (\mathfrak{p}, \mathfrak{a}) = 1,$$

wo $\bar{\mathfrak{p}}$ ein Primideal ersten Grades des Zerlegungskörpers bildet. Wenn daher ω eine beliebige ganze Zahl desselben Körpers ist, besteht die Kongruenz

$$\omega \equiv R_\omega (\text{mod. } \bar{\mathfrak{p}}^\alpha), \alpha \text{ beliebig},$$

wo R_ω eine von α abhängige rationale ganze Zahl bedeutet. Infolgedessen wird für $\alpha > 1$ die Kongruenz

$$F(x; t_1, t_2, \dots, t_n) \equiv Q_{1a}(x; t_1, t_2, \dots, t_n) \dots Q_{ka}(x; t_1, t_2, \dots, t_n) (\text{mod. } p^a)$$

gelten; die Polynome auf der rechten Seite sind einfach, ganzzahlig und irreduzibel nach dem Modul p^a, weil

$$Q_{ia} \underset{(i=1,2,\dots,k)}{\equiv} \bar{Q}_i (\text{mod. } \bar{\mathfrak{p}}^a)$$

und nach *Landsberg****)

$$\bar{Q}_i \underset{(i=1,2,\dots,k)}{\equiv} P_i^{g_i} (\text{mod. } \bar{\mathfrak{p}})$$

ausfallen. Es ist noch†)

---

*) Über Reduktion von Gleichungen durch Adjunktion. Dieses Journal Bd. 132, S. 1.

**) A. a. O. Gleichung (25.).

***) A. a. O. Gleichung (34.).

†) Das Resultat folgt auch aus dem Punkte 5), weil der Grad von Q_{id} gleich $f_i g_i$ ist.

$$Q_{i\alpha} \equiv P_i^{g_i} \pmod{p}.$$
$$(i=1, 2, \ldots, k)$$

7) Aus (II.) und (II*.) folgt, daß $Q_{i\alpha}$ nach dem Modul p^2, für den Fall $g_i = 1$ sogar schon nach p irreduzibel ist. Da noch

$$Q_{i\,\alpha+1} \equiv Q_{i\alpha} \pmod{p^\alpha}$$

ausfällt, wird

$$F_i = P_i^{g_i} + (Q_{i2} - P_i^{g_i}) + (Q_{i3} - Q_{i2}) + \cdots$$

eine Form mit rationalen p-adischen Koeffizienten sein, und im Körper der p-adischen Zahlen besteht die Relation

$$F = F_1 F_2 \ldots F_k \quad (p).$$

Nun zerfällt aber nach einem Satze von *K. Hensel**) F in diesem Körper in genau k irreduzible Faktoren, daher müssen die F_i gerade die irreduziblen Faktoren von F sein. Unser Resultat kann also in der folgenden Weise ausgesprochen werden: Zerlegen wir F im Körper der p-adischen Zahlen in einfache und irreduzible Faktoren und bezeichnen die $\alpha - 1$-ten Näherungswerte der Faktoren mit

$$Q_{1\alpha}, Q_{2\alpha}, \ldots, Q_{k\alpha},$$

so sind dies für $\alpha > 1$ nach dem Modul p^α einfache und irreduzible Formen, und

$$F \equiv Q_{1\alpha} Q_{2\alpha} \ldots Q_{k\alpha} \pmod{p^\alpha}$$

ist die einzige Zerfällung in einfache und nach dem Modul p^α irreduzible Faktoren. Ich verdanke diese Formulierung meines Satzes Herrn *Kürschák*.

8) Nun sei ω eine ganze Zahl des Körpers K, welche der irreduziblen Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0;\ a_i \text{ rat. ganze Zahl},$$

genügt. Ihre Diskriminante D ist mit der Körperdiskriminante d durch eine Relation

$$D = dt^2$$

verbunden. Wenn t relativ prim gegen die Primzahl p ausfällt, besteht inbezug auf $f(x) \pmod{p^\alpha}$ ein Satz, welcher analog zu (II.) ist. Man

---

*) Theorie der algebraischen Zahlen. Bd. 1, S. 268.

kann jedoch diesen Satz ohne Anwendung der *Landsberg*schen Untersuchungen beweisen*).

§ 2.

1) Das Polynom der n-ten primitiven Kreisteilungsgleichung soll durch $F_n(x)$ bezeichnet werden. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß $F_n(x)$ nach dem Modul p^α in eindeutiger Weise als ein Produkt von einfachen irreduziblen Polynomen darstellbar ist; wir wollen dieses Resultat auch ohne Anwendung der Idealtheorie begründen.

2) Für den Fall $(n, p) = 1$ folgt dies leicht aus den *Schönemann*schen Untersuchungen. Nun sei $n = p^\beta m$, $(m, p) = 1$; dann besteht eine Zerfällung**).

$$F_n(x) \equiv Q_1^{\varphi(p^\beta)}(x) \dots Q_e^{\varphi(p^\beta)}(x) \pmod{p},$$

wo die voneinander verschiedenen einfachen und (mod. p) irreduziblen Polynome Q_i so gewählt werden können, daß die Relationen

$$(1.) \qquad F_m(x) \equiv \underset{(i=1,2,\dots,e)}{Q_i(x)\, G_i(x)} \pmod{p^2}$$

gelten. Wir wollen zeigen, daß, wenn das einfache und (mod. p^α), $\alpha > 1$, irreduzible Polynom $R(x)$ in einer gewissen Zerfällung von $F_n(x)$ (mod. p^α) auftritt, ein Index i vorhanden ist, für welchen

$$(2.) \qquad R(x) \equiv Q_i^{\varphi(p^\beta)}(x) \pmod{p}$$

ausfällt; hierdurch wird sich die Richtigkeit unserer Behauptung ergeben. Es ist

$$R(x) \equiv Q_i^{\gamma}(x) \pmod{p}, \quad \gamma \leqq \varphi(p^\beta);$$

wäre $\gamma < \varphi(p^\beta)$, dann würden Relationen von der Gestalt

$$\varphi(p^\beta) = \gamma_1 + \gamma_2, \ \gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0,$$

$$F^n(x) \equiv (Q_i^{\gamma_1}(x)\, \Psi_1(x) + p\, H_1(x))\,(Q_i^{\gamma_2}(x)\, \Psi_2(x) + p\, H_2(x)) \pmod{p^\alpha}$$

gelten, woraus

$$(3.) \qquad F_n(x) \equiv Q_i(x)\, K_i(x) \pmod{p^2}$$

folgt. Diese Formel steht jedoch, da auf Grund der Identität

---

*) Zur Theorie der höheren Kongruenzen. A. a. O.

**) Die Primzahl p gehört (mod. m) zum Exponenten f, und es ist $ef = \varphi(n)$, wo φ das bekannte *Euler*sche Zeichen bedeutet.

$$\frac{x^{mp^\beta} - 1}{x^{mp^{\beta-1}} - 1} = (x^{mp^{\beta-1}} - 1) f(x) + p$$

die Polynome $F_n(x)$, $F_m(x)$ (mod. p^2) keinen gemeinsamen Teiler besitzen können, im Widerspruche mit der Tatsache (1.).

Aus dem Resultate ist zu ersehen: Das Polynom $F_n(x)$ ist dann und nur dann nicht nach jedem Modul p^α reduzibel, wenn die Zahl n die Gestalt

$$n = p^\beta m, \quad (m, p) = 1, \quad p \text{ eine Primzahl},$$

aufweist, wo p eine primitive Wurzel (mod. m) ist. (Ist $m = 1$, dann wird jede Zahl als primitive Wurzel gelten.)

GENERAL LIBRARY
OCT 24 1919
UNIV. OF MICH.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schlesinger, Schottky, Schwarz, Stäckel

von

K. Hensel.

Band 149.

Heft 3/4.

Ausgegeben den 17. Mai.

Berlin W. 10

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1919.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Jeder Band 20 Mark.

Band 149. Heft 3/4.

Inhaltsverzeichnis.

Pólya, Georg, Über ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern . Seite 97
Ostrowski, Alexander, Über ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern . . . . . — 117
Hensel, Kurt, Über die Invarianten algebraischer Körper . . . . . — 125
Welmin, W., Das quadratische Reziprozitätsgesetz im beliebigen quadratischen Zahlkörper . . . . . — 147
Speiser, Andreas, Die Zerlegungsgruppe . . . . . — 174

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Die fortdauernd steigenden Kosten für alle Materialien und Arbeitslöhne zwingen dazu, den Preis dieser Zeitschrift vom 149. Bande ab auf M. 20.— pro Band zu erhöhen. Verlag und Redaktion bitten die Leser, den unentweichlichen Verhältnissen Rechnung tragen zu wollen und der Zeitschrift treu zu bleiben.

An die Herren Mitarbeiter!

Die Inanspruchnahme des größten Teils der Rohstoffe für die Papierfabrikation seitens der Heeresverwaltung hat die Kriegswirtschaftsstelle für die Papier verarbeitenden Gewerbe gezwungen, die Zuteilung von Papier für Druckwerke ganz erheblich einzuschränken und die Lieferung von Frei- und Werbeexemplaren von Zeitschriften und Zeitungen zu verbieten. So sieht sich der Verlag nicht mehr imstande, den Herren Mitarbeitern Sonderdrucke ihrer Beiträge in unbeschränkter Zahl zur Verfügung stellen zu können, er kann fortab jedem der Herren Verfasser bis auf weiteres nur noch die seither unberechnet zugestandenen 25 Separate liefern und bittet freundlichst, davon Kenntnis nehmen zu wollen.

In Hochachtung und Ergebenheit

Georg Reimer.

Emil Lampe †.

Am 4. September 1918 starb im achtundsiebzigsten Lebensjahre der Geh. Regierungsrat Professor Dr. Emil Lampe. Lange Jahre hat er unter Leopold Kronecker die Redaktionsgeschäfte des Crelleschen Journales geführt und ihm in dieser Zeit die wesentlichsten Dienste geleistet. Einige kleinere Arbeiten Lampes hat unsere Zeitschrift im 84., 96., 100. und 105. Bande gebracht. Seit dem Jahre 1902 durften wir ihn zu den Mitarbeitern unserer Redaktion zählen.

Wenn auch der wesentlichste Teil seiner wissenschaftlichen Arbeit der so außerordentlich erfolgreichen Leitung des »Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik« und seiner großen Lehrtätigkeit an der Charlottenburger Hochschule gewidmet war, so muß unsere Zeitschrift doch dankbar des begeisterten Mathematikers, des warmherzigen hilfreichen Mannes gedenken. Wir werden ihn stets in treuer Erinnerung bewahren.

Kurt Hensel.

Über ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern.

Von Herrn *Georg Pólya* in Zürich.

---

1. Man nennt das Polynom

$$P(x) = \alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \cdots + \alpha_m \tag{1.}$$

ganzzahlig im Körper K, wenn die Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ ganze Zahlen von K sind. Man nenne ein Polynom $P(x)$ *ganzwertig* im Körper K, wenn für jede ganze Zahl ξ von K der Wert $P(\xi)$ eine ganze Zahl von K wird. Ist das Polynom (1.) ganzwertig im Körper K, so müssen ersichtlicherweise sämtliche Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ im Körper K liegen. Aber sie brauchen nicht alle ganze Zahlen zu sein, d. h. es gibt ganzwertige Polynome, die nicht ganzzahlig sind. So sind z. B. die Polynome

$$\frac{x(x-1)}{2}, \quad \frac{x(x-1)}{i+1}, \quad \frac{(1+\sqrt{-5})\,x(x-1)}{2}$$

ganzwertige Polynome bzw. in den Körpern $K(1)$, $K(i)$, $K(\sqrt{-5})$. Bemerken wir noch, daß das ersterwähnte Polynom weder in $K(i)$ noch in $K(\sqrt{-5})$ ganzwertig ist, da es für $x = i$ bezw. für $x = 1 + \sqrt{-5}$ keinen ganzzahligen Wert annimmt.

Es gibt Körper K, in denen eine unendliche Folge von ganzwertigen Polynomen

(2.) $$F_0(x),\ F_1(x),\ F_2(x), \ldots F_m(x), \ldots$$

mit folgenden beiden Eigenschaften existiert:

1) Der Grad von $F_m(x)$ ist m.

2) Jedes ganzwertige Polynom m-ten Grades $P(x)$ von K läßt sich in die Form

$$P(x) = \beta F_m(x) + \beta' F_{m-1}(x) + \cdots + \beta^{(m)} F_0(x)$$

setzen, wo $\beta, \beta', \beta'', \ldots \beta^{(m)}$ *ganze* Zahlen von K sind.

Existiert in K eine Folge (2.) mit den genannten zwei Eigenschaften, so werde ich sagen, daß es in K eine *reguläre Basis der ganzwertigen Polynome* gibt. So gibt es z. B., wie bekannt, im rationalen Körper $K(1)$ eine reguläre Basis der ganzwertigen Polynome. Am einfachsten wählt man für das m-te Basispolynom

$$F_m(x) = \binom{x}{m} = \frac{x(x-1)\ (x-2)\ldots(x-m+1)}{m!}.$$

Ich werde beweisen, daß *in jedem Körper von der Klassenzahl Eins die ganzwertigen Polynome eine reguläre Basis besitzen* (Satz II). Mit Hilfe eines Satzes über Kongruenzen (Satz IV) kann man diese Basis tatsächlich aufstellen.

Es gibt Körper, deren Klassenzahl größer ist als 1, und in denen dennoch eine reguläre Basis der ganzwertigen Polynome existiert. An welche Bedingungen die Existenz einer solchen Basis gebunden ist, gelang mir im allgemeinen Falle nicht vollständig aufzuklären, nur für quadratische Körper. *In quadratischen Körpern existiert die reguläre Basis oder nicht, jenachdem die Idealteiler der Grundzahl sämtlich Hauptideale sind oder nicht* (Satz V).

Die Fragestellung dieser Arbeit ist mir von Herrn *A. Hurwitz* schon vor längerer Zeit mitgeteilt worden. Nachdem ich die einfachen Tatsachen bemerkt hatte, die in vorliegender Arbeit unter 2 auseinandergesetzt werden, konnte die Untersuchung rasch fortschreiten, dank der vielfachen Anregung, die mir seitens des Herrn Problemstellers zuteil wurde. Es rührt auch manche Bemerkung im nachfolgenden Text von Herrn *Hurwitz* her.

2. Es sei das Polynom $P(x)$ vom Grade m. Setzen wir in gewohnter Bezeichnung

$$(3.)\quad \Delta^\nu P(0) = P(\nu) - \binom{\nu}{1} P(\nu-1) + \binom{\nu}{2} P(\nu-2) - \cdots + (-1)^\nu P(0),$$

so ist bekanntlich

$$P(x) = P(0) + \binom{x}{1} \Delta P(0) + \binom{x}{2} \Delta^2 P(0) + \cdots + \binom{x}{m} \Delta^m P(0)$$

$$= \frac{\Delta^m P(0)}{m!} x^m + \cdots.$$

Ist das Polynom $P(x)$ ganzwertig im Körper K, so sind die Zahlen (3.) sämtlich ganze Zahlen von K, und insbesondere muß der höchste Koeffizient von $P(x)$, d. h. der Koeffizient von x^m, der Quotient einer ganzen Zahl von K und der rationalen ganzen Zahl $m!$ sein.

Es seien

$$P_1(x) = \frac{\alpha_1}{m!} x^m + \cdots,$$

$$P_2(x) = \frac{\alpha_2}{m!} x^m + \cdots,$$

.....

sämtliche ganzwertigen Polynome m-ten Grades im Körper K. *Dann bilden die Zahlen*

$$(4.)\qquad 0,\ \alpha_1,\ \alpha_2, \cdots$$

die Gesamtheit der Zahlen eines gewissen Ideals von K.

In der Tat, wenn $\alpha_i,\ \alpha_j, \cdots \alpha_l$ irgendwelche Zahlen der Gesamtheit (4.) und $\lambda_i,\ \lambda_j, \cdots \lambda_l$ irgendwelche ganzen Zahlen des Körpers K bedeuten, so gehört

$$\lambda_i\, \alpha_i + \lambda_j\, \alpha_j + \cdots + \lambda_l\, \alpha_l$$

auch zur Gesamtheit (4.), da das Polynom

$$\lambda_i P_i(x) + \lambda_j P_j(x) + \cdots + \lambda_k P_k(x) = \frac{\lambda_i \alpha_i + \lambda_j \alpha_j + \cdots + \lambda_k \alpha_k}{m!} x^m + \cdots$$

offenbar ganzwertig ist.

Es heiße a_m das Ideal von K, dessen sämtliche Zahlen unter (4.) stehen. (Der Index m nimmt Rücksicht auf die betrachtete Gradzahl m.) Es besteht der

Satz I. *Daß im Körper K eine reguläre Basis der ganzwertigen Polynome existiere, dafür ist notwendig und hinreichend, daß sämtliche Ideale*

$$\mathfrak{a}_0,\ \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2, \cdots \mathfrak{a}_m, \cdots$$

Hauptideale sind.

Da die Polynome 1 und x ganzwertig sind, ist in irgendeinem Körper $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_1 = (1)$. — Um Satz I zu beweisen, muß man zweierlei zeigen.

1) Es existiere im Körper K eine reguläre Basis

(2.) $$F_0(x),\ F_1(x), \ldots\ F_m(x), \ldots$$

der ganzwertigen Polynome. Das ganzwertige Polynom $F_m(x)$ ist vom m-ten Grade, und daher ist

$$F_m(x) = \frac{\alpha}{m!}\, x^m + \cdots,$$

wo die ganze Zahl α dem Ideal $\mathfrak{a}_m$ angehört. Irgendein ganzwertiges Polynom m-ten Grades $P_i(x)$ läßt sich in der Form

$$P_i(x) = \beta\, F_m(x) + \beta'\, F_{m-1}(x) + \cdots$$

darstellen, wo $\beta, \beta', \ldots$ ganze Zahlen sind. Daraus gewinnt man durch Vergleichung der höchsten Koeffizienten

$$\alpha_i = \beta\, \alpha,$$

d. h. daß irgendeine Zahl der Gesamtheit (4.) ein Multiplum von α ist, w. z. b. w.

2) Es sei nun umgekehrt angenommen, daß alle Ideale

$$\mathfrak{a}_0,\ \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_m, \ldots$$

Hauptideale sind. Es sei ferner angenommen, gemäß dem Prinzip der vollständigen Induktion, daß alle ganzwertigen Polynome vom Höchstgrade $m-1$ sich aus m ganzwertigen Polynomen

$$F_0(x),\ F_1(x),\ F_2(x), \ldots\ F_{m-1}(x)$$

linear zusammensetzen lassen, mit ganzzahligen, im Körper K liegenden Koeffizienten. Dabei soll ν der Grad von $F_\nu(x)$ sein $(\nu = 0, 1, 2, \ldots m-1)$.

Nach unserer Annahme ist $\mathfrak{a}_m$ ein Hauptideal

$$\mathfrak{a}_m = (\alpha).$$

Da α selbst eine von 0 verschiedene Zahl des Ideals $\mathfrak{a}_m$ ist, gibt es ganzwertige Polynome vom Grade m, deren höchster Koeffizient $\frac{\alpha}{m!}$ ist. Nennen

wir eins dieser Polynome $F_m(x)$.

Da

$$\alpha_i = \beta\,\alpha,$$

wo β eine ganze Zahl ist, wird

$$P_i(x) - \beta F_m(x)$$

ein ganzwertiges Polynom $m-1$-ten Grades und kann als solches, nach Annahme der vollständigen Induktion, aus $F_0(x)$, $F_1(x), \ldots F_{m-1}(x)$ linear mit ganzzahligen Koeffizienten zusammengesetzt werden, w. z. b. w.

Aus Satz I folgt unmittelbar der

Satz II. *In jedem Körper von der Klassenzahl Eins besitzen die ganzwertigen Polynome eine reguläre Basis.*

Wir werden später (unter 6) sehen, daß es Körper gibt, deren Klassenzahl größer als Eins ist, und in welchen dennoch eine reguläre Basis der ganzwertigen Polynome existiert. --

Durch Beachtung gewisser in der Gesamtheit (4.) vorkommenden Zahlen können wir über die Struktur des höchsten Koeffizienten von $F_m(x)$ Näheres erfahren. Da

$$x^m = \frac{m!}{m!}\,x^m$$

ein ganzwertiges Polynom ist, ist $m!$ auch eine Zahl des Ideals $\mathfrak{a}_m$. Es ist $\mathfrak{a}_m$ im Falle einer regulären Basis ein Hauptideal

$$\mathfrak{a}_m = (\alpha).$$

Folglich ist α ein Teiler von $m!$

$$m! = \alpha\,\mathsf{M}_m,$$

und es ist

$$F_m(x) = \frac{\alpha}{m!}\,x^m + \cdots = \frac{1}{\mathsf{M}_m}\,x^m + \cdots,$$

wo M_m eine gewisse ganze Zahl von K ist.

Das Polynom

$$x\,F_{m-1}(x) = \frac{x^m}{\mathsf{M}_{m-1}} + \cdots$$

ist ein ganzwertiges Polynom m-ten Grades und kann daher durch $F_0(x)$, $F_1(x), \ldots F_m(x)$ linear, mit ganzzahligen Koeffizienten ausgedrückt werden. Es sei

$$x\,F_{m-1}(x) = \mu_m F_m(x) + \cdots.$$

Durch Vergleichung des höchsten Koeffizienten gewinnt man daraus die Gleichung

$$\mathsf{M}_m = \mu_m \mathsf{M}_{m-1}. \tag{5.}$$

Wiederholt man diesen Schluß für alle Gradzahlen, so sieht man dies ein: Wenn es im Körper K eine reguläre Basis der ganzwertigen Polynome gibt, so gibt es darin eine bis auf Einheitsfaktoren eindeutig bestimmte Folge von ganzen Zahlen

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_m, \ldots,$$

so daß der höchste Koeffizient des m-ten Basispolynoms $F_m(x)$

$$\frac{1}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \cdots \mu_m}$$

wird. Und umgekehrt, jedes ganzwertige Polynom m-ten Grades, das diese Zahl zum höchsten Koeffizienten hat, kann die Rolle des m-ten Basispolynoms übernehmen.

Die Betrachtung der Ideale $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_m, \ldots$ gibt uns auch im allgemeinen Falle, wo keine reguläre Basis der ganzwertigen Polynome existiert, Aufschluß über die Beschaffenheit dieser Polynome. Es besteht nämlich der

Satz III. *In irgendeinem algebraischen Zahlkörper K besitzen die ganzwertigen Polynome eine reguläre oder eine irreguläre Basis. Eine Basis der letzteren Art besteht aus einer unendlichen Folge von ganzwertigen Polynomen*

$$G_0(x), G_1(x), G_2(x), \ldots G_m(x), \ldots \tag{6.}$$

wo $G_m(x)$ vom Grade m ist, und aus gewissen Potenzen von x

$$x^{m_1}, x^{m_2}, x^{m_3}, \ldots \tag{7.}$$

mit natürlichen ganzen Zahlen $m_1, m_2, m_3, \ldots$ als Exponenten, wobei die Polynome (6.) und (7.) so beschaffen sind, daß irgendein ganzwertiges Polynom von K sich durch sie linear darstellen läßt, mit ganzzahligen in K liegenden Koeffizienten.

Die Zahl $m!$ liegt, wie gesagt, im Ideale $\mathfrak{a}_m$. Daher läßt sich $\mathfrak{a}_m$, nach einem fundamentalen Satze der Idealtheorie, in der Form

$$\mathfrak{a}_m = (m!, \alpha)$$

darstellen, wo α eine passend gewählte Zahl von $\mathfrak{a}_m$ bezeichnet. Von dieser Bemerkung ausgehend, läßt sich Satz III durch eine ähnliche vollständige Induktion erschließen, wie der zweite Teil des Satzes II.

Die Bedeutung der in (7.) auftretenden Zahlen $m_1, m_2, m_3, \ldots$ ist also die: die Ideale

$$\mathfrak{a}_{m_1}, \mathfrak{a}_{m_2}, \mathfrak{a}_{m_3}, \ldots \tag{8.}$$

sind keine Hauptideale, aber irgendein Ideal $\mathfrak{a}_\nu$, das in (8.) nicht auftritt, ist ein Hauptideal.

3. Die weitere Verfolgung des Gegenstandes führt zu gewissen Fragen über Kongruenzen, die vielleicht auch an und für sich einiges Interesse beanspruchen können. Es sei $P(x)$ ein ganzzahliges Polynom und $\mathfrak{i}$ ein Ideal des Körpers K. Ich sage von der Kongruenz

$$P(\xi) \equiv 0, (\mathfrak{i}), \tag{9.}$$

daß sie „stets erfüllt" ist, wenn sie für jede dem Körper K angehörige ganze Zahl ξ erfüllt ist. Um zu entscheiden, ob die Kongruenz (9.) stets erfüllt ist oder nicht, genügt es, $N(\mathfrak{i})$ verschiedene passend gewählte Werte von ξ zu untersuchen.

Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal und $P(x)$ ein ganzzahliges Polynom m-ten Grades im Körper K. Es sollen nicht alle Koeffizienten des Polynoms $P(x)$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein. Es fragt sich, was die höchste Potenz von $\mathfrak{p}$ ist, durch welche $P(x)$ stets teilbar sein kann. Von dieser Frage handelt der

Satz IV. *Wenn nicht alle Koeffizienten des Polynoms m-ten Grades $P(x)$ durch das Primideal $\mathfrak{p}$ teilbar sind, und wenn die Kongruenz*

$$P(\xi) \equiv 0, (\mathfrak{p}^a) \tag{10.}$$

stets erfüllt ist, so ist

$$a \leqq \left[\frac{m}{N}\right] + \left[\frac{m}{N^2}\right] + \left[\frac{m}{N^3}\right] + \cdots = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{m}{N^\nu}\right], \tag{11.}$$

wobei

$$N = N(\mathfrak{p})$$

die Norm von $\mathfrak{p}$ bedeutet.

Die auf der rechten Seite der Ungleichung (11.) stehende unendliche Reihe mit ganzzahligen Gliedern hat nur h von 0 verschiedene Glieder,

wenn

$$h = \left[\frac{\log m}{\log N}\right]$$

bedeutet, d. h. wenn die Ungleichungen

$$N^h \leqq m < N^{h+1}$$

bestehen. Es ist nützlich, die Abkürzung

$$\left[\frac{m}{N}\right] + \left[\frac{m}{N^2}\right] + \left[\frac{m}{N^3}\right] + \cdots = \psi(m)$$

einzuführen.

Es kann übrigens wirklich vorkommen, daß in (11.) das Zeichen $=$ am Platze ist. Ich schreite zur Konstruktion von solchen Polynomen $P(x)$, für welche dieser extreme Fall erreicht ist.

Es sei $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{N-1}$ ein vollständiges Restsystem für das Primideal $\mathfrak{p}$ und es sei π eine Zahl, die dem Ideal $\mathfrak{p}$ angehört, jedoch $\mathfrak{p}^2$ nicht angehört. Ich konstruiere eine unendliche Folge von Zahlen

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \ldots$$

durch folgende Vorschrift: man soll die Zahl m in dem Zahlensystem mit der Basis N aufschreiben

$$m = c_0 + c_1 N + c_2 N^2 + \cdots + c_h N^h,$$

wo also

$$0 \leqq c_\nu \leqq N-1.$$

Dann ist

$$\alpha_m = \varrho_{c_0} + \varrho_{c_1}\pi + \varrho_{c_2}\pi^2 + \cdots + \varrho_{c_h}\pi^h.$$

Ich will die Eigenschaften der so definierten Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m, \ldots$ in mehreren Schritten entwickeln.

1) In der Differenz $\alpha_m - \alpha_n$ geht das Primideal $\mathfrak{p}$ zu derselben Potenz auf, wie die Zahl N in der Differenz $m - n$.

Ich behaupte also m. a. W., daß die beiden Relationen

$$(12.) \qquad \begin{cases} \alpha_m - \alpha_n \equiv 0, (\mathfrak{p}^a) \\ \alpha_m - \alpha_n \not\equiv 0, (\mathfrak{p}^{a+1}) \end{cases}$$

dann und nur dann bestehen, wenn die beiden Relationen

$$(13.) \qquad \begin{cases} m - n \equiv 0, (N^a) \\ m - n \not\equiv 0, (N^{a+1}) \end{cases}$$

bestehen.

In der Tat, (13.) bedeutet, daß m und n im Zahlensystem mit der Basis N aufgeschrieben

$$m = c_0 + c_1 N + \cdots + c_{a-1} N^{a-1} + c_a N^a + \cdots,$$
$$n = c_0 + c_1 N + \cdots + c_{a-1} N^{a-1} + c'_a N^a + \cdots$$

werden, wo

$$c_a \leqq c'_a.$$

Also ist

$$\alpha_m - \alpha_n = (\varrho_{c_a} - \varrho_{c'_a})\, \pi^a + \cdots,$$

woraus die beiden Relationen (12.) folgen. Ebenso folgen aus (12.) die beiden Relationen (13.)

2) Die höchste Potenz von $\mathfrak{p}$, die in dem Produkte

$$(\alpha_{m_1} - \alpha_{n_1})\,(\alpha_{m_2} - \alpha_{n_2}) \cdots (\alpha_{m_k} - \alpha_{n_k})$$

aufgeht, kann durch die Betrachtung der Differenzen

$$m_1 - n_1,\ m_2 - n_2, \ldots m_k - n_k$$

ermittelt werden.

Denn ist für $\nu = 1, 2, \ldots k$

$$\begin{cases} m_\nu - n_\nu \equiv 0, & (N^{a_\nu}) \\ m_\nu - n_\nu \not\equiv 0, & (N^{a_\nu + 1}), \end{cases}$$

so ist

$$(\alpha_{m_1} - \alpha_{n_1})\,(\alpha_{m_2} - \alpha_{n_2}) \cdots (\alpha_{m_k} - \alpha_{n_k}) \equiv 0, \quad (\mathfrak{p}^{a_1 + a_2 + \cdots + a_k})$$
$$(\alpha_{m_1} - \alpha_{n_1})\,(\alpha_{m_2} - \alpha_{n_2}) \cdots (\alpha_{m_k} - \alpha_{n_k}) \not\equiv 0, \quad (\mathfrak{p}^{a_1 + a_2 + \cdots + a_k + 1}).$$

3) Die Zahlen

(14.) $$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{N^a - 1}$$

bilden ein vollständiges Restsystem für das Ideal $\mathfrak{p}^a$.

Die Anzahl der Zahlen (14.) ist

$$N^a = N(\mathfrak{p}^a).$$

Es genügt zu zeigen: wenn

(15.) $$0 \leqq m < N^a, \qquad 0 \leqq n < N^a, \qquad m \leqq n,$$

so ist

$$\alpha_m - \alpha_n \not\equiv 0, \quad (\mathfrak{p}^a).$$

Dies ist aber richtig kraft 1), denn aus den Bedingungen (15.) folgt

$$m - n \not\equiv 0, \quad (N^a). \text{ —}$$

Ich bilde nun mit Hilfe der Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m, \ldots$ gewisse Polynome

$$f_m(x) = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1)\ldots(x - \alpha_{m-1})$$
$$(m = 1, 2, 3, \ldots),$$

deren Eigenschaften ich weiter untersuchen will. Ich setze noch zur Ergänzung

$$f_0(x) = 1.$$

4) Es ist

$$\begin{cases} f_m(\alpha_m) \equiv 0, (\mathfrak{p}^{\psi(m)}) \\ f_m(\alpha_m) \not\equiv 0, (\mathfrak{p}^{\psi(m)+1}). \end{cases}$$

In der Tat, man hat

$$f_m(\alpha_m) = (\alpha_m - \alpha_0)(\alpha_m - \alpha_1)\ldots(\alpha_m - \alpha_{m-1}).$$

Man betrachte, gemäß 2), die Differenzen

$$(16.) \qquad m - 0, m - 1, m - 2, \ldots m - (m - 1).$$

Unter den Zahlen (16.) sind $\left[\frac{m}{N^\nu}\right]$ Zahlen durch N^ν teilbar und $\left[\frac{m}{N^{\nu+1}}\right]$ Zahlen durch $N^{\nu+1}$ teilbar. Die Anzahl derjenigen unter den Zahlen (16.), die durch N^ν, aber durch keine höhere Potenz von N teilbar sind, ist also

$$\left[\frac{m}{N^\nu}\right] - \left[\frac{m}{N^{\nu+1}}\right].$$

Auf Grund von 2) hat also die höchste in $f_m(\alpha_m)$ aufgehende Potenz von $\mathfrak{p}$ den Exponenten

$$1\left(\left[\frac{m}{N}\right] - \left[\frac{m}{N^2}\right]\right) + 2\left(\left[\frac{m}{N^2}\right] - \left[\frac{m}{N^3}\right]\right) + \cdots + \nu\left(\left[\frac{m}{N^\nu}\right] - \left[\frac{m}{N^{\nu+1}}\right]\right) + \cdots$$
$$= \left[\frac{m}{N}\right] + \left[\frac{m}{N^2}\right] + \left[\frac{m}{N^3}\right] + \cdots$$
$$= \psi(m),$$

w. z. b. w.

5) Ist ξ irgendeine ganze Zahl des Körpers K, so ist

$$(17.) \qquad f_m(\xi) \equiv 0, (\mathfrak{p}^{\psi(m)}).$$

Es gibt, nach 3), eine Zahl α_μ, so daß

$$\xi \equiv \alpha_\mu, (\mathfrak{p}^{\psi(m)}).$$

Es ist

$$f_m(\xi) \equiv f_m(\alpha_\mu) \equiv (\alpha_\mu - \alpha_0)(\alpha_\mu - \alpha_1) \dots (\alpha_\mu - \alpha_{m-1}), (\mathfrak{p}^{\psi(m)}).$$

Ist $\mu \leqq m-1$, so ist (17.) sicherlich richtig. Ist hingegen $\mu \geqq m$, so betrachte man die Differenzen

$$(18.) \qquad \mu - 0, \mu - 1, \mu - 2, \dots \mu - (m-1).$$

Unter den Zahlen (18.) sind

$$\left[\frac{\mu}{N^\nu}\right] - \left[\frac{\mu - m}{N^\nu}\right]$$

Zahlen, die durch N^ν teilbar sind. Die Anzahl derjenigen unter den Zahlen (18.), die durch N^ν, aber durch keine höhere Potenz von N teilbar sind, ist also genau

$$\left(\left[\frac{\mu}{N^\nu}\right] - \left[\frac{\mu - m}{N^\nu}\right]\right) - \left(\left[\frac{\mu}{N^{\nu+1}}\right] - \left[\frac{\mu - m}{N^{\nu+1}}\right]\right).$$

Auf Grund von 2) hat also die höchste in $f_m(\alpha_\mu)$ aufgehende Potenz von $\mathfrak{p}$ den Exponenten

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \left\{\left(\left[\frac{\mu}{N^\nu}\right] - \left[\frac{\mu - m}{N^\nu}\right]\right) - \left(\left[\frac{\mu}{N^{\nu+1}}\right] - \left[\frac{\mu - m}{N^{\nu+1}}\right]\right)\right\} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\left[\frac{\mu}{N^\nu}\right] - \left[\frac{\mu - m}{N^\nu}\right]\right).$$

Um die Behauptung 5) zu beweisen, muß man also nur

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\left[\frac{\mu}{N^\nu}\right] - \left[\frac{\mu - m}{N^\nu}\right]\right) \geqq \psi(m)$$

dartun. Diese Ungleichung ist aber gleichbedeutend mit der offenbar richtigen Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{\mu}{N^\nu}\right] \geqq \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\left[\frac{\mu - m}{N^\nu}\right] + \left[\frac{m}{N^\nu}\right]\right).$$

Hiermit ist 5) bewiesen, d. h. es ist bewiesen, daß die Kongruenz

$$f_m(\xi) \equiv 0, (\mathfrak{p}^{\psi(m)})$$

stets erfüllt ist. 4) besagt hingegen, daß die Kongruenz

$$f_m(\xi) \equiv 0, (\mathfrak{p}^{\psi(m)+1})$$

nicht stets erfüllt ist. Zusammenfassend können wir sagen, daß wir Satz IV für das spezielle Polynom $f_m(x)$ bewiesen haben, und zugleich zeigten, daß die durch Satz IV gegebene obere Schranke $\psi(m)$ nicht erniedrigt werden kann. Denn für das spezielle Polynom $P(x) = f_m(x)$ wird in Ungleichung (11.) der Fall der Gleichheit erreicht.

Das Gefundene öffnet aber auch den Weg zum Beweise des vollen Satzes IV.

6) Jedes ganzzahlige Polynom m-ten Grades

$$P(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_m x^m \tag{19.}$$

des Körpers K ist in der Form

$$P(x) = \gamma_0 f_0(x) + \gamma_1 f_1(x) + \cdots + \gamma_m f_m(x) \tag{20.}$$

darstellbar, wo $\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_m$ ganze Zahlen von K sind. Sind die Zahlen $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_m$ nicht sämtlich durch $\mathfrak{p}$ teilbar, so können auch die Zahlen $\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_m$ nicht sämtlich durch $\mathfrak{p}$ teilbar werden.

Daß jedes ganzzahlige Polynom in der Form (20.) dargestellt werden kann, ergibt sich durch eine geläufige Schlußweise (vgl. den zweiten Teil des Beweises für Satz I). Insbesondere ergibt sich, daß die Polynome $1, x, x^2, \ldots x^m$ durch eine unimodulare ganzzahlige Substitution mit den Polynomen $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots f_m(x)$ verbunden sind. Es ist

$$(1, x, x^2, \ldots x^m) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ \delta_{10} & 1 & 0 & \ldots 0 \\ \delta_{20} & \delta_{21} & 1 & \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{m0} & \delta_{m1} & \delta_{m2} & \ldots 1 \end{Vmatrix} (f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots f_m(x)). \tag{21.}$$

Die Zahlen $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_m$ sind also mit den Zahlen $\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_m$ durch die zu (21.) kontragrediente unimodulare Substitution

$$(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m) = \begin{Vmatrix} 1 & \delta_{10} & \delta_{20} & \ldots & \delta_{m0} \\ 0 & 1 & \delta_{21} & \ldots & \delta_{m1} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \delta_{m2} \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{Vmatrix} (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m)$$

verbunden. Daher sind die beiden Ideale $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m)$ und $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m)$ identisch, und weil $\mathfrak{p}$ kein Teiler des Ideals

$$(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m) = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m)$$

ist, kann es auch nicht in allen Zahlen $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$ aufgehen, w. z. b. w.

Jetzt haben wir alle Mittel zum Beweise des Satzes IV beisammen. Ich führe den Beweis indirekt, indem ich im Gegensatze zu der Behauptung des Satzes IV annehme, daß die Kongruenz

$$P(\xi) = \gamma_0 f_0(\xi) + \gamma_1 f_1(\xi) + \cdots + \gamma_s f_s(\xi) + \cdots + \gamma_m f_m(\xi) \equiv 0, \ (\mathfrak{p}^a) \tag{22.}$$

stets erfüllt ist, und zugleich

$$\gamma_s \not\equiv 0, (\mathfrak{p})$$

und

$$a > \psi(m).$$

Nach der zu widerlegenden Voraussetzung gibt es in der Formel (22.) Koeffizienten γ_ν von der Eigenschaft

$$\gamma_\nu \not\equiv 0, (\mathfrak{p}^{a-\psi(\nu)}). \tag{23.}$$

So hat z. B. der Index $\nu = s$ die durch (23.) geforderte Eigenschaft, da

$$a - \psi(s) = a - \psi(m) + \psi(m) - \psi(s) \geqq a - \psi(m) > 0$$

und folglich

$$\gamma_s \not\equiv 0, (\mathfrak{p}^{a-\psi(s)})$$

ist. Unter allen Indizes ν, die (23.) genügen, sei $\nu = t$ der kleinste, d. h. der Index t hat die Eigenschaft

$$\gamma_0 \equiv 0, (\mathfrak{p}^{a-\psi(0)}), \gamma_1 \equiv 0, (\mathfrak{p}^{a-\psi(1)}), \dots \gamma_{t-1} \equiv 0, (\mathfrak{p}^{a-\psi(t-1)}),$$

aber

$$\gamma_t \not\equiv 0, (\mathfrak{p}^{a-\psi(t)}). \tag{24.}$$

Setzen wir in der angeblich stets erfüllten Kongruenz (22.) $\xi = \alpha_t$. Nach der Struktur der Polynome $f_\nu(x)$ und unter Hinzuziehung von 5) erhält man nacheinander

$$\left.\begin{aligned} 0 &\equiv \gamma_0 f_0(\alpha_t) + \cdots + \gamma_{t-1} f_{t-1}(\alpha_t) + \gamma_t f_t(\alpha_t) + \cdots + \gamma_m f_m(\alpha_t) \\ &\equiv \gamma_0 f_0(\alpha_t) + \cdots + \gamma_{t-1} f_{t-1}(\alpha_t) + \gamma_t f_t(\alpha_t) \\ &\equiv \gamma_t f_t(a_t) \end{aligned}\right\} (\mathfrak{p}^a),$$

woraus nach 4) folgen würde

$$\gamma_t \equiv 0, (\mathfrak{p}^{a-\psi(t)})$$

im Widerspruch zu (24.).

Der Widerspruch löst sich nur dann, wenn man die Richtigkeit von Satz IV zugibt.

4. Man nennt ein ganzzahliges Polynom $P(x)$ des Körpers K „primitiv“ oder „vom Inhalt 1“, wenn es im Körper K kein Primideal gibt, das sämtliche Koeffizienten von $P(x)$ teilt. Ist das primitive Polynom $P(x)$ vom Grade m und ist die Kongruenz

$$P(\xi) \equiv 0, (\mathfrak{i})$$

stets erfüllt, so kann das Ideal $\mathfrak{i}$ nicht beliebig sein.

Seien nämlich

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \dots$$

sämtliche Primideale des Körpers K, nach wachsenden Normen geordnet, es seien

$$N_1, N_2, N_3, \dots$$

ihre Normen, und man setze

$$a_i = \left[\frac{m}{N_i}\right] + \left[\frac{m}{N_i^2}\right] + \left[\frac{m}{N_i^3}\right] + \cdots \qquad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

so ist das Ideal $\mathfrak{i}$ notwendigerweise ein Teiler des Ideals

$$\prod_{i=1}^{\infty} \mathfrak{p}_i^{a_i}.$$

Dies folgt unmittelbar aus Satz IV.

Umgekehrt: es kann ein primitives Polynom m-ten Grades, oder genauer, ein Polynom mit dem höchsten Koeffizienten 1 konstruiert werden, das stets durch das Ideal $\prod_{i=1}^{\infty} \mathfrak{p}_i^{a_i}$ teilbar ist.

In der Tat, es seien

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \dots \mathfrak{p}_l$$

sämtliche Primideale von K, deren Norm m nicht übersteigt. Kraft des unter 3. Gesagten lassen sich l ganzzahlige Polynome $H_1(x), H_2(x), \dots H_l(x)$ bestimmen, die alle den höchsten Koeffizienten 1 haben und alle in m Linearfaktoren zerfallen, so daß die Kongruenzen

$$H_1(\xi) \equiv 0, (\mathfrak{p}_1^{a_1})$$
$$H_2(\xi) \equiv 0, (\mathfrak{p}_2^{a_2})$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$H_l(\xi) \equiv 0, (\mathfrak{p}_l^{a_l})$$

stets erfüllt sind. Durch Auflösung m linearer Kongruenzen von der Form

$$\beta \equiv \alpha^{(1)}, (\mathfrak{p}_1^{a_1})$$
$$\beta \equiv \alpha^{(2)}, (\mathfrak{p}_2^{a_2})$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\beta \equiv \alpha^{(l)}, (\mathfrak{p}_l^{a_l})$$

läßt sich ein Polynom

$$H(x) = (x - \beta_0)(x - \beta_1) \dots (x - \beta_{m-1})$$

bestimmen, so daß identisch in x die Kongruenzen

$$H(x) \equiv H_i(x), \ (\mathfrak{p}_i^{a_i}) \quad (i = 1, 2, 3, \dots l)$$

bestehen. Daher ist die Kongruenz

$$H(\xi) \equiv 0, \ (\mathfrak{p}_1^{a_1} \mathfrak{p}_2^{a_2} \dots \mathfrak{p}_l^{a_l})$$

stets erfüllt, was gezeigt werden sollte.

5. Ich will unter gegenwärtiger Nummer nur Körper von der Klassenzahl 1 betrachten, d. h. nur solche Körper, in denen eindeutige Zerlegbarkeit der Zahlen herrscht.

Es seien die Koeffizienten des Polynoms

$$P(x) = \frac{\alpha_0}{\beta_0} x^m + \frac{\alpha_1}{\beta_1} x^{m-1} + \dots + \frac{\alpha_s}{\beta_s} x^{m-s} + \dots + \frac{\alpha_m}{\beta_m}$$

Zahlen des Körpers K. Genauer, $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_m, \beta_0, \beta_1, \dots \beta_m$ seien ganze Zahlen von K, und es sei

$$(25.) \qquad (\alpha_\nu, \beta_\nu) = 1 \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots m)$$

angenommen. Es kann sicherlich

$$P(x) = \frac{\alpha}{\beta} (\gamma_0 x^m + \gamma_1 x^{m-1} + \dots + \gamma_m)$$

gesetzt werden, wo das Polynom $\gamma_0 x^m + \gamma_1 x^{m-1} + \dots + \gamma_m$ primitiv ist,

$$(25.) \qquad (\alpha, \beta) = 1$$

und β durch jede der Zahlen $\beta_0, \beta_1, \dots \beta_m$ teilbar ist. Letzteres geht aus den Gleichungen

$$\beta \alpha_\nu = \alpha \gamma_\nu \beta_\nu$$

hervor.

Ist eine der Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_m$ eine Einheit, ist etwa, der Bestimmtheit halber, $\alpha_s = 1$, so muß auch α eine Einheit sein. Dies folgt aus

$$\beta = \alpha \gamma_s \beta_s \equiv 0, \ (\alpha)$$

im Verein mit (25). —

Wir können nun ein m-tes Basispolynom und die unter 2. erwähnte verallgemeinerte Fakultät $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m$ in irgendeinem Körper von der Klassenzahl 1 aufbauen.

Seien

$$(\pi_1), (\pi_2), (\pi_3), \dots$$

sämtliche Primideale von K, nach wachsenden Normen geordnet, es seien

bzw.

$$N_1, N_2, N_3, \ldots$$

ihre Normen, und es sei

$$a_i = \left[\frac{m}{N_i}\right] + \left[\frac{m}{N_i^2}\right] + \left[\frac{m}{N_i^3}\right] + \cdots.$$

$(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

Es sei

$$N_1 \leqq N_2 \leqq \cdots \leqq N_l \leqq m < N_{l+1}.$$

Ich behaupte, daß

$$\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_m = \varepsilon\, \pi_1^{a_1} \pi_2^{a_2} \ldots \pi_l^{a_l}, \tag{26.}$$

wo ε eine Einheit bedeutet.

Denn einerseits kann das m-te Basispolynom in die Form

$$F_m(x) = \frac{x^m}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_m} + \cdots = \frac{\gamma_0 x^m + \gamma_1 x^{m-1} + \cdots + \gamma_m}{\beta}$$

gesetzt werden, wo, wie eben gezeigt wurde, $\gamma_0 x^m + \gamma_1 x^{m-1} + \cdots + \gamma_m$ ein primitives Polynom und β ein Multiplum von $\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_m$ ist. Daß $F_m(x)$ ganzwertig ist, bedeutet nur, daß die Kongruenz

$$\gamma_0 \xi_i^m + \gamma_1 \xi^{m-1} + \cdots + \gamma_m \equiv 0, (\beta)$$

stets erfüllt ist. Umsomehr ist die Kongruenz

$$\gamma_0 \xi^m + \gamma_1 \xi^{m-1} + \cdots + \gamma_m \equiv 0, (\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_m)$$

stets erfüllt, und da an der linken Seite dieser Kongruenz ein primitives Polynom steht, muß nach Satz IV (vgl. unter 4.) $\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_m$ ein Teiler von $\pi_1^{a_1} \pi_2^{a_2} \ldots \pi_l^{a_l}$ sein.

Andererseits können wir auf die unter 4. auseinandergesetzte Weise ein ganzzahliges Polynom

$$H(x) = (x - \beta_0)(x - \beta_1) \cdots (x - \beta_{m-1})$$

konstruieren, so daß das Polynom

$$\frac{H(x)}{\pi_1^{a_1} \pi_2^{a_2} \cdots \pi_l^{a_l}}$$

ganzwertig wird. Letzteres Polynom ist durch das Fundamentalsystem der ganzwertigen Polynome darstelbar

$$\frac{H(x)}{\pi_1^{a_1} \pi_2^{a_2} \cdots \pi_l^{a_l}} = \beta F_m(x) + \beta' F^{(m-1)}(x) + \cdots,$$

und es folgt durch Vergleichung der höchsten Koeffizienten

$$\frac{1}{\pi_1^{a_1} \pi_2^{a_2} \cdots \pi_l^{a_l}} = \frac{\beta}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_m},$$

d. h. daß $\pi_1^{a_1}\pi_2^{a_2}\dots\pi_l^{a_l}$ ein Teiler von $\mu_1\mu_2\dots\mu_m$ ist. Damit ist (26.) voll bewiesen.

Wir sehen zugleich, daß *als m-tes Basispolynom ein Polynom von der Form*

$$\frac{H(x)}{\mu_1\mu_2\dots\mu_m}$$

angenommen werden kann, wo das Polynom m-ten Grades $H(x)$ ganzzahlig ist, den höchsten Koeffizienten 1 *hat und im Körper K in lauter Linearfaktoren zerfällt.* Es folgt ferner, aus der Darstellung durch die Basispolynome, daß *jedes ganzwertige Polynom m-ten Grades in Form eines Quotienten dargestellt werden kann, dessen Zähler ein ganzzahliges Polynom und dessen Nenner ein Teiler von $\mu_1\mu_2\cdots\mu_m$* ist. Alle diese Sätze verallgemeinern wohlbekannte elementare Sätze der rationalen Zahlentheorie und sind vielleicht auch geeignet, diese geläufigen Tatsachen neu zu beleuchten.

6. In quadratischen Körpern gelingt es völlig, die Bedingungen klarzulegen, an welche die Existenz einer regulären Basis gebunden ist. Dies leistet der

Satz V. *Notwendig und hinreichend für die Existenz einer regulären Basis der ganzwertigen Polynome in einem quadratischen Körper K ist die Bedingung, daß sämtliche Idealfaktoren der Grundzahl von K Hauptideale sind.*

Die Bedingung ist also m. a. W. die, daß alle Primideale, die in der Grundzahl von K aufgehen, Hauptideale sind. — Ich gehe von den bekannten Tatsachen*) der Zerlegung der Primzahlen in quadratischen Körpern aus, und ich unterscheide zwei Fälle.

1) Sind alle Primideale, die in der Grundzahl aufgehen, Hauptideale, so sind alle Primideale, die nicht Hauptideale sind, vom ersten Grade und paarweise konjugiert. D. h., ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal, das nicht Hauptideal ist, und $\mathfrak{p}'$ das konjugierte Primideal, so ist

$$N(\mathfrak{p}) = N(\mathfrak{p}') = \mathfrak{p}\mathfrak{p}' = p$$

eine rationale Primzahl.

---

*) Hilbert, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, S. 284, Satz 97.

Seien nun $(\pi_1), (\pi_2), \ldots$ alle Hauptprimideale, $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_1'$, $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_2', \ldots$ alle Paare von konjugierten Primidealen, aber nicht Hauptideale, die in $m!$ aufgehen, u. zw. sei

$$(m!) = (\pi_1)^{a_1} (\pi_2)^{a_2} \ldots (\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_1')^{b_1} (\mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_2')^{b_2} \ldots.$$

Es ist also $m!$ durch $N(\mathfrak{p}_i)^{b_i}$ teilbar.

Auf Grund der Entwicklungen unter 3. und 4. bestimme man ein Polynom $P(x)$, so daß

$$P(\xi) = (\xi - \gamma_0)(\xi - \gamma_1) \ldots (\xi - \gamma_{m-1}) \equiv 0, (\mathfrak{p}_1^{b_1} \mathfrak{p}_1'^{b_1} \mathfrak{p}_2^{b_2} \mathfrak{p}_2'^{b_2} \ldots)$$

für jede ganze Zahl ξ des Körpers. Daher ist

$$\frac{P(x)}{(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_1')^{b_1} (\mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_2')^{b_2} \ldots} = \frac{\pi_1^{a_1} \pi_2^{a_2} \ldots}{m!} x^m + \ldots$$

ein ganzwertiges Polynom. Das im Satz I auftretende Ideal $\mathfrak{a}_m$ ist also ein Teiler des Ideals $(\pi_1^{a_1} \pi_2^{a_2} \ldots)$, folglich ein *Hauptideal*, was zuerst zu zeigen war.

2) Ist p die kleinste in der Grundzahl aufgehende rationale Primzahl, die ein Produkt von Nichthauptidealen ist, so ist

$$(p) = \mathfrak{p}^2,$$

wo das Primideal $\mathfrak{p}$ kein Hauptideal ist.

Es ist

$$(p!) = \mathfrak{p}^2 (\pi_1)^{a_1} (\pi_2)^{a_2} \ldots (\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_1')^{b_1} (\mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_2')^{b_2} \ldots,$$

wo $(\pi_1), (\pi_2), \ldots$ Hauptprimideale, $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_1'$, $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_2', \ldots$ paarweise konjugierte Primideale, aber keine Hauptideale sind. In der Tat, die Primideale, die nicht Hauptideale und von kleinerer Norm als p sind, können in Paare von konjugierten verteilt werden.

Man bestimme, gemäß den Entwicklungen unter 3. und 4., ein Polynom

$$P(x) = (x - \gamma_0)(x - \gamma_1) \ldots (x - \gamma_{p-1}),$$

so daß die Kongruenz

$$P(\xi) \equiv 0, (\mathfrak{p}\, \mathfrak{p}_1^{b_1} \mathfrak{p}_1'^{b_1} \mathfrak{p}_2^{b_2} \mathfrak{p}_2'^{b_2} \ldots)$$

stets erfüllt ist. Seien α und β zwei ganze Zahlen, die $\mathfrak{p}$ erzeugen,

$$(\alpha, \beta) = \mathfrak{p},$$

so sind die beiden Polynome

$$\frac{\alpha P(x)}{p(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1')^{b_1}(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_2')^{b_2}\dots} = \frac{\alpha\,\pi_1^{a_1}\pi_2^{a_2}\dots}{p!}x^p + \dots,$$
$$\frac{\beta P(x)}{p(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1')^{b_1}(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_2')^{b_2}\dots} = \frac{\beta\,\pi_1^{a_1}\pi_2^{a_2}\dots}{p!}x^p + \dots$$

ganzwertig. Das Ideal $\mathfrak{a}_p$ (vgl. Satz I) ist also ein Teiler von $\mathfrak{p}(\pi_1^{a_1}\pi_2^{a_2}\dots)$. Wäre $\mathfrak{a}_p$ kein Multiplum von $\mathfrak{p}$, so wäre $\mathfrak{a}_p$ ein Teiler von $p-1!$, und es würde ein ganzwertiges Polynom geben, dessen höchster Koeffizient $\frac{p-1!}{p!}$ ist. Da jedes ganzwertige Polynom p-ten Grades der Quotient eines ganzzahligen Polynoms und $p!$ sein muß (vgl. unter 2), hätten wir ein ganzwertiges Polynom von der Form

$$\frac{p-1!\,x^p + \alpha_1 x^{p-1} + \alpha_2 x^{p-2} + \dots + \alpha_p}{p!},$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ ganze Zahlen sind. Also würde die Kongruenz

$$p-1!\,\xi^p + \alpha_1\xi^{p-1} + \alpha_2\xi^{p-2} + \dots + \alpha_p \equiv 0, \ (\mathfrak{p}^2)$$

stets erfüllt sein. Das ist aber unmöglich kraft des Satzes IV, da $p-1!$ durch $\mathfrak{p}$ nicht teilbar ist und

$$\left[\frac{p}{N(\mathfrak{p})}\right] + \left[\frac{p}{N(\mathfrak{p})^2}\right] + \dots = \frac{p}{N(\mathfrak{p})} = 1 < 2.$$

So bleibt nur der Fall übrig, daß $\mathfrak{a}_p$ ein Multiplum von $\mathfrak{p}$, also von der Form

$$\mathfrak{a}_p = \mathfrak{p}\mathfrak{i}$$

ist, wo $\mathfrak{i}$ ein Teiler von $(\pi_1^{a_1}\pi_2^{a_2}\dots)$, also ein Hauptideal ist. Folglich ist $\mathfrak{a}_p$ ***kein Hauptideal***, w. z. b. w.

Ich will noch, ohne auf den nun naheliegenden Beweis näher einzugehen, die Konstruktion der verallgemeinerten Fakultät $\mu_1\mu_2\dots\mu_m$ für die quadratischen Körper angeben, in denen eine reguläre Basis der ganzwertigen Polynome existiert. Die Grundzahl des Körpers K heiße d. Ich bezeichne eine rationale Primzahl generell mit p bzw. mit q oder r, jenachdem sie der ersten bzw. der zweiten oder der dritten der drei Relationen

$$\left(\frac{d}{p}\right) = 0, \qquad \left(\frac{d}{q}\right) = +1, \qquad \left(\frac{d}{r}\right) = -1$$

genügt. Eine Primzahl p, d. h. ein Primfaktor der Grundzahl, ist das Quadrat eines Primideals, also in dem uns nun beschäftigenden Falle eines

Hauptideals

$$(p) = (\pi)^2.$$

Lautet nun die Zerlegung der Zahl m in Primfaktoren

$$m = \dots p^a \dots q^b \dots r^c \dots,$$

so ist

$$\mu_m = \dots \pi^a \dots q^b \dots r^{\left[\frac{e}{2}\right]} \dots.$$

Es folgt übrigens aus Satz V nach bekannten Sätzen über quadratische Körper*), daß, wenn eine reguläre Basis der ganzwertigen Polynome im quadratischen Körper K existiert, in der Grundzahl von K höchstens zwei verschiedene Primzahlen aufgehen. Man kann daher wohl sagen, daß im allgemeinen Falle keine solche Basis existiert.

*) Hilbert, a. a. O. S. 303, Satz 106.

Über ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern.

Von Herrn *Alexander Ostrowski* in Marburg a. d. L.

Wir legen den folgenden Betrachtungen einen endlichen Zahlkörper K zugrunde. Unter *ganzen* Zahlen verstehen wir ganze Zahlen aus K. Alle Polynome, die wir betrachten, haben Koeffizienten aus K, Koeffizienten *ganzzahliger* Polynome sind insbesondere ganze Zahlen aus K.

Mit Herrn *Pólya* verstehen wir unter einem *ganzwertigen Polynom* in K ein Polynom $P(x) = \alpha_0 x^m + \cdots + \alpha_m$ von der Eigenschaft, daß für jedes ganze x auch $P(x)$ ganz ist. In der vorhergehenden Abhandlung*) untersucht Herr *G. Pólya* unter anderem die Frage, wann die Gesamtheit der ganzwertigen Polynome in K eine *reguläre Basis* besitzt, d. h., wann in K eine solche unendliche Folge von ganzwertigen Polynomen

$$F_0(x), F_1(x), \ldots, F_m(x), \ldots$$

von den Graden $0, 1, \ldots, m, \ldots$ existiert, daß jedes ganzwertige Polynom in K in der Eorm

$$\beta F_i(x) + \beta' F_{i-1}(x) + \ldots + \beta^{(i)} F_0(x)$$

mit ganzen $\beta, \beta', \ldots, \beta^{(i)}$ darstellbar ist.

Während in der *Pólya*schen Arbeit diese Frage für quadratische Körper allgemein entschieden und darüber hinaus die Existenz einer regulären Basis für alle endlichen Zahlkörper mit der Klassenzahl 1 nachgewiesen wird, möchte ich in der vorliegenden Note zeigen, daß sich diese Frage auch für den allgemeinen Fall durch eine leichte Verschärfung der *Pólya*schen Methode entscheiden läßt, wobei das im Falle normaler Körper besonders einfache Resultat die genaue Verallgemeinerung des *Pólya*schen

*) *G. Pólya*, Über ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern, dieses Journal, Bd. 149, S. 97—116.

Kriteriums für quadratische Körper darstellt. Zum Schluß wird die analoge Fragestellung für Polynome mehrerer Variabeln untersucht. — Wir benutzen dabei die folgenden von Herrn *Pólya* aufgestellten Tatsachen:

1. Stellt man alle ganzwertigen Polynome vom Grade m in K in der Form $\frac{\alpha x^m}{m!} + \cdots$ dar, so bildet die Gesamtheit der *ganzen* Zahlen α ein Ideal $\mathfrak{a}_m$. Das durch $\mathfrak{c}_m$ zu bezeichnende Ideal $\frac{m!}{\mathfrak{a}_m}$ ist ganz. *Dann und nur dann besitzen die ganzwertigen Polynome in K eine reguläre Basis, wenn die Ideale $\mathfrak{a}_m$ für alle m Hauptideale sind.* Sind alle $\mathfrak{a}_m$ Hauptideale, so werden wir im folgenden allgemein unter $\mathfrak{a}_m$ eine festgewählte, dem Ideal $\mathfrak{a}_m$ entsprechende Zahl des Körpers verstehen.

2. Es gibt für jede ganze nicht negative Zahl m ein solches Ideal I_m, daß für jeden Idealteiler γ von I_m (I_m eingeschlossen), und nur für solche Teiler, solche ganzzahligen primitiven*) Polynome m-ten Grades von x existieren, die für alle ganzen x durch γ teilbare Werte ergeben. Und zwar ist

$$(1.) \qquad I_m = \prod_{i=1}^{i=\infty} \mathfrak{p}_i^{\psi_i(m)}, \quad \psi_i(m) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left[\frac{m}{N(\mathfrak{p}_i)^\nu}\right],$$

wo $\mathfrak{p}_i$ alle Primideale von K durchläuft, $N(\mathfrak{p}_i)$ die Norm von $\mathfrak{p}_i$ bezeichnet und [ ] die *Gauß*sche Bezeichnung für die größten Ganzen ist. Insbesondere kann man jedem I_m ein ganzzahliges Polynom $H_m(x) = x^m + \cdots$ zuordnen, dessen Werte für alle ganzen x durch I_m teilbar sind. —

Wir beweisen nun die Relation**)

$$I_m = \mathfrak{c}_m = \frac{m!}{\mathfrak{a}_m}.$$

Ist I_m durch $\mathfrak{p}^k$, nicht aber durch $\mathfrak{p}^{k+1}$ teilbar ($k > 0$), wo $\mathfrak{p}$ irgend ein Primideal in K ist, so ist $H_m(x)$ für alle ganzen x durch $\mathfrak{p}^k$ teilbar. Es sei π eine durch $\mathfrak{p}$, nicht aber durch $\mathfrak{p}^2$ teilbare ganze Zahl, M eine zu $\mathfrak{p}$ relativprime, durch das Ideal $\frac{\pi}{\mathfrak{p}}$ teilbare ganze Zahl. Dann ist

$$\frac{M^k}{\pi^k} H_m(x)$$

ein ganzwertiges Polynom. Daher muß $\frac{m!\, M^k}{\pi^k}$ nach der Definition von $\mathfrak{a}_m$

*) Unter primitiven Polynomen verstehen wir solche, deren Koeffizienten den größten gemeinsamen Idealteiler 1 haben.

**) Für den Fall, daß K die Klassenzahl 1 hat, ist diese Relation auch bereits von Herrn *Pólya* bewiesen worden. Vgl. Formel (26.) seiner Arbeit, S. 112 dieses Bandes.

durch $\mathfrak{a}_m$ teilbar sein. Folglich ist $\mathfrak{c}_m = \frac{m!}{\mathfrak{a}_m}$ durch $\mathfrak{p}^k$ teilbar, da M zu $\mathfrak{p}$ relativprim ist.

Ist aber ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{c}_m$ genau in der n-ten, in $m!$ genau in der n'-ten Potenz enthalten ($n > 0$), so gibt es sicher ein ganzwertiges Polynom $P(x) = \frac{\alpha}{m!} x^m + \cdots$, bei dem α genau durch $\mathfrak{p}^{n'-n}$ teilbar ist. Ist wieder π eine durch $\mathfrak{p}$, nicht aber durch $\mathfrak{p}^2$ teilbare ganze Zahl, so läßt sich ein solcher Exponent $\bar{n} \geqq n$ und eine solche zu $\mathfrak{p}$ relativprime ganze Zahl N finden, daß das Polynom $\bar{P}(x) = N\pi^{\bar{n}} P(x)$ lauter ganze Koeffizienten hat, deren größter gemeinschaftlicher Idealteiler zu $\mathfrak{p}$ relativprim ist. Bezeichnen wir den größten gemeinschaftlichen Idealteiler aller Koeffizienten von $\bar{P}(x)$ mit Ausnahme des ersten durch A, so läßt sich sicher eine solche durch $\mathfrak{p}^{\bar{n}}$ teilbare ganze Zahl a finden, daß die Summe $\frac{\alpha}{m!} N\pi^{\bar{n}} + a$ zu A relativprim ist. Denn wir können a als zu $-\frac{\alpha}{m!} N\pi^{\bar{n}}$ inkongruent nach jedem in A enthaltenen von $\mathfrak{p}$ verschiedenen Primideal annehmen. Ist aber A durch $\mathfrak{p}$ teilbar, so ist $\frac{\alpha}{m!} N\pi^{\bar{n}}$ zu $\mathfrak{p}$ relativprim, und dasselbe gilt von der obigen Summe. Folglich ist das *primitive* ganzzahlige Polynom $\bar{P}(x) + ax^m$ für alle ganzen x durch $\mathfrak{p}^{\bar{n}}$ teilbar. Daraus folgt, daß I_m durch $\mathfrak{p}^{\bar{n}}$, also sicher durch $\mathfrak{p}^n$ teilbar ist. Daher kommt jedes Primideal in derselben Potenz in I_m und $\mathfrak{c}_m$ vor, w. z. b. w.

Alle Ideale $\mathfrak{a}_m$ gehören also dann und nur dann zur Hauptklasse, wenn dies für alle I_m der Fall ist. Da aber I_m wegen (1.) durch I_{m-1} teilbar, $I_0 = 1$ ist, brauchen wir nur zu untersuchen, wann alle Quotienten $\frac{I_m}{I_{m-1}}$ Hauptideale sind. Wir bemerken nun, daß $\psi_i(m) - \psi_i(m-1)$ gleich 0 ist, solange m nicht durch $N(\mathfrak{p}_i)$ teilbar ist. Ist aber letzteres der Fall, so hat jedenfalls $\psi_i(m) - \psi_i(m-1)$ für alle Ideale $\mathfrak{p}_i$ mit derselben Norm $N(\mathfrak{p}_i)$ den gleichen Wert. Daraus folgt das *Theorem:*

Dann und nur dann besitzen die ganzwertigen Polynome eines endlichen Zahlkörpers K eine reguläre Basis, wenn für jede Primzahl p alle Produkte sämtlicher voneinander verschiedener Primidealteiler von p von demselben Grade (die dieselbe Potenz von p zur Norm haben) zur Hauptklasse gehören.

Beweis. Nehmen wir an, daß K der im Theorem verlangten Bedingung genügt. Dann ist nach dem oben Gesagten jeder Quotient $\frac{I_m}{I_{m-1}}$ ein Produkt derjenigen Primideale, deren Normen Teiler von m sind. Dabei kommen alle Primideale mit gleicher Norm in $\frac{I_m}{I_{m-1}}$ in derselben Potenz vor. Nach unserer Annahme gehört aber das Produkt aller Primideale, die dieselbe Norm haben, zur Hauptklasse. Dasselbe gilt daher auch von $\frac{I_m}{I_{m-1}}$.

Wir nehmen nun umgekehrt an, daß alle Ideale $\frac{I_m}{I_{m-1}}$ Hauptideale sind. Wir fassen irgendeine Primzahl p ins Auge und bezeichnen die Produkte sämtlicher voneinander verschiedener Primidealteiler von p, die die Grade 1, 2,... haben, durch $A_1, A_2, \ldots$. Betrachten wir zuerst $\frac{I_p}{I_{p-1}}$, so ist dieses nach unserer Annahme zur Hauptklasse gehörende Ideal den obigen Bemerkungen über $\psi_i(m) - \psi_i(m-1)$ zufolge gleich A_1. Betrachten wir nun $\frac{I_{p^2}}{I_{p^2-1}}$, so ist dieses Hauptideal ein Produkt von A_2 mit einer Potenz von A_1. Daher ist auch A_2 ein Hauptideal. Allgemeiner ist $\frac{I_{p^i}}{I_{p^i-1}}$ das Produkt von A_i mit einem Potenzprodukt von $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$. Folglich gehören alle A_i zur Hauptklasse, w. z. b. w.

Nimmt man noch die Voraussetzung hinzu, daß K normal ist, so haben alle Primidealteiler einer Primzahl denselben Grad, und ihr Produkt ist dieser Primzahl selbst gleich, wenn sie keine Idealteiler mehrfach enthält. Daher ist dann die Bedingung unseres Theorems für alle Primzahlen von selbst erfüllt, abgesehen von den wesentlichen Diskriminantenteilern. Ist aber für eine in der Körperdiskriminante aufgehende Primzahl p

$$p = (\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_i)^e$$

die Zerlegung in Primidealfaktoren, so muß $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_i$ zur Hauptklasse gehören. So erhalten wir den Satz: *Dann und nur dann besitzen die ganzwertigen Polynome eines normalen endlichen Zahlkörpers eine reguläre Basis, wenn für jede in der Körperdiskriminante aufgehende Primzahl p das Produkt sämtlicher voneinander verschiedener Primidealfaktoren von p zur Hauptklasse gehört.*

Da im allgemeinen (z. B. wenn der Grad des normalen Körpers

zur Körperdiskriminante relativprim ist) $(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_i)^{e-1}$ den zu p gehörenden Teiler des Grundideals darstellt, so läßt sich dann die Bedingung unseres Satzes auch so aussprechen, daß *die größten gemeinschaftlichen Teiler des Grundideals mit jeder Primzahl zur Hauptklasse gehören müssen.* Die Bedingungen des obigen Satzes sind jedenfalls erfüllt, wenn alle Primidealteiler der Grundzahl Hauptideale sind, was zum Beispiel in allen Kreisteilungskörpern der Fall ist, die durch Adjunktion einer Einheitswurzel von einem Primzahlpotenzgrade entstehen.

Für beliebige endliche Körper scheint die weitere Reduktion der Bedingungen unseres Theorems sehr schwierig zu sein. Für kubische Körper erhält man jedoch sehr leicht außer der leicht anzugebenden auf die Diskriminantenteiler bezüglichen Bedingungen noch die weitere merkwürdige Forderung, daß *alle Primideale 2-ten Grades Hauptideale sind.* —

Existiert eine reguläre Basis, so bietet ihre Konstruktion keine Schwierigkeiten. Dann kann man nämlich, ähnlich wie es in der *Pólya*schen Abhandlung für den Fall der Klassenzahl 1 geschieht, für das m-te Polynom der Basis einfach $\frac{H_m(x)}{I_m}$ nehmen. Und wie aus irgendeiner Basis alle Basen abgeleitet werden, ist leicht zu übersehen. —

Eine der im vorigen betrachteten ganz analoge Frage kann auch für Polynome mehrerer Veränderlichen behandelt werden. Wir ordnen alle Potenzprodukte aus n Variabeln $x_1, \dots, x_n$ lexikalisch, indem wir von zwei Potenzprodukten dasjenige *höher* nennen, das in bezug auf x_1 vom größeren Grad ist, von zwei Potenzprodukten, die in bezug auf x_1 vom gleichen Grade sind, wieder dasjenige, das in bezug auf x_2 vom größeren Grad ist, usw. Wir nennen wieder ein Polynom in $x_1, \dots, x_n$ *ganzwertig* in K, wenn es für alle ganzen $x_1, \dots, x_n$ ganze Werte annimmt. Läßt sich nun jedem Potenzprodukt P aus $x_1, \dots, x_n$ ein ganzwertiges Polynom F_P in K so zuordnen, daß sich jedes ganzwertige Polynom aus K linear mit ganzen Koeffizienten durch gewisse der Funktionen F_P ausdrücken läßt, so nennen wir die Gesamtheit der Polynome F_P eine *reguläre Basis* der Gesamtheit G aller ganzwertigen Polynome in $x_1, \dots, x_n$ aus K. — Man sieht leicht ein, daß sich durch die Polynome einer solchen

regulären Basis jedes Polynom in $x_1, \ldots, x_n$ auf eine einzige Weise linear darstellen läßt.

Besitzt nun G eine reguläre Basis, so besitzt die Gesamtheit G' aller von x_n allein abhängigen Polynome aus G eine reguläre Basis im Sinne von *Pólya*, da in der Darstellung irgendeines Polynoms aus G' durch die Polynome F_P keine solchen Polynome auftreten können, die von einer der Variablen $x_1, \ldots, x_{n-1}$ wirklich abhängig sind. Denn jedes Potenzprodukt, in dem eine der Variablen $x_1, \ldots, x_{n-1}$ wirklich vorkommt, ist *höher* als jede Potenz von x_n. Daher sind die in unserem obigen Theorem aufgestellten Bedingungen jedenfalls *notwendig* für die Existenz einer regulären Basis von G. *Sind umgekehrt jene Bedingungen erfüllt, so besitzt G stets eine reguläre Basis. Und zwar wird jedes System von Polynomen aus G eine reguläre Basis von G darstellen, in dem jedem Potenzprodukt $P = x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$ ein und nur ein Polynom mit dem höchsten Glied $\frac{a_{m_1}}{m_1!} \ldots \frac{a_{m_n}}{m_n!} P$ entspricht. Eine spezielle solche Basis wird offenbar durch die Polynome*

$$F_{x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}} = \frac{a_{m_1}}{m_1!} \ldots \frac{a_{m_n}}{m_n!} H_{m_1}(x_1) \ldots H_{m_n}(x_n)$$

gebildet.

Zum Beweise dieses Theorems ist es offenbar nur nötig zu zeigen, daß, wenn das höchste Glied eines Polynoms aus G sich von ${x_1}^{m_1} \ldots {x_n}^{m_n}$ nur um einen Zahlenkoeffizienten unterscheidet, dieser Koeffizient durch $\frac{a_{m_1}}{m_1!} \ldots \frac{a_{m_n}}{m_n!}$ teilbar ist. (Dabei heißt eine von zwei — nicht notwendig ganzen — Zahlen durch die andere teilbar, wenn ihr Quotient ganz ist.) Denn dann läßt sich von jedem solchen Polynom ein entsprechendes Polynom der Basis mit einer geeignet gewählten ganzen Zahl multipliziert subtrahieren, so daß ein ganzwertiges Polynom mit einem niedrigeren höchsten Gliede übrig bleibt, und durch wiederholte Anwendung derselben Reduktion erhält man die gesuchte Darstellung durch die Basis, da eine Folge von Potenzprodukten aus $x_1, \ldots, x_n$, die so geordnet ist, daß jedes Potenzprodukt höher ist als das unmittelbar folgende, notwendig nach endlich vielen Potenzprodukten abbricht. — Wir bemerken noch, daß aus den behaupteten Tatsachen sofort folgt: Ist β eine ganze Zahl aus K, so besitzt auch die Gesamtheit $\bar{G}$ aller Polynome in $x_1, \ldots, x_n$, die für alle ganzen $x_1, \ldots, x_n$ aus K durch β teilbare Werte ergeben, eine ganz ähn-

liche reguläre Basis wie G, und zwar entsteht eine reguläre Basis von $\bar{G}$ durch Multiplikation aller Polynome einer Basis von G mit β. Daher ist bei jedem Polynom der Gesamtheit $\bar{G}$, dessen höchstes Glied sich von $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ nur um einen Zahlenkoeffizienten unterscheidet, dieser Zahlenkoeffizient durch $\beta \frac{\mathfrak{a}_{m_1}}{m_1!} \dots \frac{\mathfrak{a}_{m_n}}{m_n!}$ teilbar.

Nehmen wir nun alle unsere Behauptungen für den Fall von $n-1$ Variabeln als bewiesen an und ist $F(x_1, \dots, x_n)$ ein Polynom aus G mit dem höchsten Gliede $c x_1^m \dots x_n^{m_n}$, so ergibt F für alle ganzen $x_2, \dots, x_n$ ein ganzwertiges Polynom von x_1. Ist daher $T(x_2, \dots, x_n)$ der Koeffizient von $x_1^{m_1}$ in F, so ergibt $m_1! T$ für alle ganzen $x_2, \dots, x_n$ durch $\mathfrak{a}_{m_1}$ teilbare Werte, wie aus der von Herrn *Pólya* aufgestellten, oben unter 1. angeführten Tatsache sofort folgt. Daher muß der Koeffizient $m_1! c$ von $x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ in $m_1! T$ nach unserer Annahme durch $\mathfrak{a}_{m_1} \frac{\mathfrak{a}_{m_2}}{m_2!} \dots \frac{\mathfrak{a}_{m_n}}{m_n!}$ teilbar sein. Folglich ist c durch $\frac{\mathfrak{a}_{m_1}}{m_1!} \dots \frac{\mathfrak{a}_{m_n}}{m_n!}$ teilbar, w. z. b. w.

Damit ist unser Theorem auch für von mehreren Variabeln abhängige ganzwertige Polynome bewiesen. —

Wir wollen noch kurz angeben, wie die von Herrn *Pólya* für den Fall einer Variablen aufgestellten, oben unter 2. angeführten Eigenschaften des Ideals I_m sich auf den Fall mehrerer Variabeln ausdehnen lassen. — Die Ideale I_m brauchen jetzt also *nicht* mehr sämtlich zur Hauptklasse zu gehören. — Jedem Polynom $F(x_1, \dots, x_n)$, welches in bezug auf $x_1, \dots, x_n$ die Gradzahlen $m_1, \dots, m_n$ besitzt, ordnen wir das Ideal $I_{m_1, \dots, m_n} = I_{m_1} \dots I_{m_n}$ zu. Es gibt dann ganzzahlige Polynome mit den Gradzahlen $m_1, \dots, m_n$, die für alle ganzen $x_1, \dots, x_n$ durch $I_{m_1, \dots, m_n}$ teilbare Werte ergeben. Zum Beispiel besitzt das Polynom $H_{m_1}(x_1) \dots H_{m_n}(x_n)$ diese Eigenschaft. *Gibt es umgekehrt ein ganzzahliges primitives Polynom $F(x_1, \dots, x_n)$ mit den Gradzahlen $m_1, \dots, m_n$ von der Eigenschaft, für alle ganzen $x_1, \dots, x_n$ durch ein gewisses Ideal $\mathfrak{d}$ teilbare Werte zu ergeben, so muß $\mathfrak{d}$ ein Teiler von $I_{m_1, \dots, m_n}$ sein.* Dies folgt sofort aus dem Hilfssatz:

Es sei der größte gemeinschaftliche Idealteiler aller Koeffizienten eines ganzzahligen Polynoms $F(x_1, \dots, x_n)$ in $x_1, \dots, x_n$ genau durch $\mathfrak{p}^d$ teilbar, wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal von K ist. Hat dann $F(x_1, \dots, x_n)$ die Eigenschaft, für

alle ganzen $x_1, \ldots, x_n$ durch eine gewisse Potenz $\mathfrak{p}^a$ von $\mathfrak{p}$ teilbare Werte zu ergeben, so ist $\mathfrak{p}^{a-d}$ ein Teiler von $I_{m_1, \ldots, m_n}$, wenn $m_1, \ldots, m_n$ die Gradzahlen von F in bezug auf $x_1, \ldots, x_n$ sind.

Beweis. Es sei zuerst $n = 1$. Ist dann π eine durch $\mathfrak{p}$, nicht aber durch $\mathfrak{p}^2$ teilbare ganze Zahl, M eine zu $\mathfrak{p}$ relativprime durch das Ideal $\frac{\pi}{\mathfrak{p}}$ teilbare ganze Zahl, so ist $M^d F = \pi^d \overline{F}$, wo die ganzzahlige Funktion $\overline{F}$ für alle ganzen x_1 durch $\mathfrak{p}^{a-d}$ teilbare Werte ergibt. Dieselbe Eigenschaft besitzt auch jedes zu $\overline{F}$ nach $\mathfrak{p}^{a-d}$ kongruente Polynom $\overline{\overline{F}}$; wir können daher $\overline{\overline{F}}$ so wählen, daß der größte gemeinschaftliche Teiler seiner Koeffizienten gleich 1 und daß es vom Grade m_1 ist. Jetzt folgt aber durch Anwendung der von Herrn *Pólya* bewiesenen Eigenschaften von I_m auf $\overline{\overline{F}}$, daß $\mathfrak{p}^{a-d}$ ein Teiler von I_{m_1} ist. — Wir nehmen nun unseren Hilfssatz für $n-1$ Variabele als bewiesen an. Es sei $F(x_2, \ldots, x_n)$ einer von denjenigen Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von x_1 in F, bei denen der größte gemeinschaftliche Idealteiler aller Zahlenkoeffizienten genau durch $\mathfrak{p}^d$ teilbar ist. Ist dann I_{m_1} genau durch $\mathfrak{p}^l$ teilbar, so lehrt die Anwendung unseres Hilfssatzes für $n = 1$, daß $F(x_2, \ldots, x_n)$ für alle ganzen $x_2, \ldots, x_n$ durch $\mathfrak{p}^{a-l}$ teilbare Werte ergibt. Sind die Gradzahlen von $F(x_2, \ldots, x_n)$ bzw. $\overline{m}_2, \ldots, \overline{m}_n$ so folgt durch die Anwendung unseres Hilfssatzes für $n-1$ Variabele auf $F(x_2, \ldots, x_n)$, daß $\mathfrak{p}^{a-l-d}$ ein Teiler von $I_{\overline{m}_2, \ldots, \overline{m}_n}$ ist, also auch ein Teiler von $I_{m_2, \ldots, m_n}$, wegen $\overline{m}_2 \leqq m_2, \ldots, \overline{m}_n \leqq m_n$. Daher ist $\mathfrak{p}^{a-d}$ ein Teiler von $I_{m_1, \ldots, m_n} = I_{m_1} I_{m_2, \ldots, m_n}$, w. z. b. w.

Aus diesem Hilfssatz ergibt sich sogar der weitere Satz: *Ist der größte gemeinschaftliche Idealteiler aller Zahlenkoeffizienten eines ganzzahligen Polynoms $F(x_1, \ldots, x_n)$ gleich $\mathfrak{d}'$ und ergibt F für alle ganzen $x_1, \ldots, x_n$ durch ein Ideal $\mathfrak{d}$ teilbare Werte, so ist $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}'}$ ein Teiler von $I_{m_1, \ldots, m_n}$, wenn $m_1, \ldots, m_n$ die Gradzahlen von F sind.*

Über die Invarianten algebraischer Körper.

Von Herrn *Kurt Hensel* in Marburg a. d. L.

Einleitung.

Die Theorie der algebraischen Kurven und Flächen, sowie diejenige der *Abel*schen Integrale beruht allein auf der Untersuchung der rationalen Funktionen von zwei Variablen z und u, welche miteinander durch eine irreduzible Gleichung

$$F(z, u) = 0 \tag{1.}$$

mit Zahlenkoeffizienten verbunden sind. Alle diese bilden einen sogenannten Körper $K(z, u)$, weil sie sich durch die rationalen Rechenoperationen wiedererzeugen. Je zwei nicht konstante Funktionen x und y dieses Körpers sind dann ebenfalls durch eine irreduzible Gleichung

$$G(x, y) = 0 \tag{2.}$$

miteinander verbunden. Hieraus folgt weiter, daß sich die Funktionen des Körpers nicht bloß durch die elementaren Rechenoperationen, sondern auch durch Differentiation wiedererzeugen, denn aus der Gleichung (2.) folgt ja sofort, daß auch

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}} \tag{3.}$$

dem Körper $K(z, u)$ angehört, und das gleiche gilt auch für alle höheren Ableitungen.

Alle Funktionen dieses Körpers und nur sie sind eindeutig und, abgesehen von Polen, auch stetig ausgebreitet auf einer *Riemann*schen Kugelfläche $\mathfrak{K}_x$, welche man sich für eine beliebige nicht konstante Funktion x des Körpers als unabhängige Variable gebildet denken kann. Die Kugelflächen $\mathfrak{K}_y$, $\mathfrak{K}_z, \ldots$, welche man bei der Wahl einer anderen unabhängigen Veränderlichen innerhalb $K(z, u)$ erhält, sind aufeinander eindeutig umkehrbar und stetig bezogen, so daß die sämtlichen Punkte $\mathfrak{P}$ einer solchen Fläche $\mathfrak{K}_x$ unabhängig von der Wahl der Veränderlichen x definiert sind.

Jede Funktion ξ des Körpers ist bis auf eine multiplikative Konstante durch ihre Nullstellen und Pole auf der Fläche $\mathfrak{K}_x$ definiert. Ist $\mathfrak{P}_0$ irgend ein Punkt der *Riemann*schen Kugelfläche $\mathfrak{K}_x$ und π_0 eine beliebige dort verschwindende Funktion des Körpers, so läßt sich jede Funktion ξ des Körpers in einer endlichen Umgebung von $\mathfrak{P}_0$ in eine Potenzreihe:

$$\xi = c\,\pi_0^r + c'\,\pi_0^{r'} + \cdots \tag{4.}$$

entwickeln, welche nach ganzen oder rational gebrochenen steigenden Potenzen von π_0 mit festem Exponentennenner fortschreitet. Man kann z. B. für π_0 den Linearfaktor $x - x_0$ bzw. $\frac{1}{x}$ wählen, jenachdem x in $\mathfrak{P}_0$ den endlichen Wert x_0 annimmt oder dort unendlich wird. Wählt man speziell für π_0 eine dort in möglichst niedriger Ordnung verschwindende Funktion des Körpers, so schreitet die Entwicklung (4.) nach *ganzen* Potenzen von π_0 fort, und der Exponent r des Anfangsgliedes von ξ bestimmt dann die Ordnungszahl von ξ in $\mathfrak{P}_0$.

Ordnet man jedem Punkte $\mathfrak{P}$ vom $\mathfrak{K}_x$ einen gleichbezeichneten Primteiler zu und sagt man ferner, daß ξ genau durch die Potenz $\mathfrak{P}^\delta$ teilbar ist, wenn ξ in $\mathfrak{P}$ die Ordnungszahl δ besitzt und daß diese Funktion den Divisor $\mathfrak{P}_1^{\delta_1}\mathfrak{P}_2^{\delta_2}$ genau enthält, wenn sie in $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ bzw. die Ordnungszahlen δ_1 und δ_2 hat usw., so folgt, daß jede Funktion ξ bis auf eine multiplikative Konstante durch einen Divisor

$$\mathfrak{P}_1^{\delta_1}\mathfrak{P}_2^{\delta_2}\ldots\mathfrak{P}_h^{\delta_h} \tag{5.}$$

bestimmt ist, dessen Primfaktoren $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_h$ den Nullstellen und den Polen von ξ entsprechen.

Um auch diese multiplikative Konstante festzulegen, denke ich

mir alle Funktionen ξ in der Umgebung eines beliebig aber fest angenommenen Punktes $\mathfrak{P}_0$ wie in (4.) nach Potenzen einer fest gewählten dort verschwindenden Funktion π_0 entwickelt und multipliziere den zu ξ gehörigen Divisor (5.) mit der Konstante c, wenn c der Koeffizient des Anfangsgliedes der zugehörigen Entwicklung (4.) ist. Dann soll

$$(5^a.) \qquad \mathfrak{Q}_\xi = c\,\mathfrak{P}_1^{\delta_1}\mathfrak{P}_2^{\delta_2}\dots\mathfrak{P}_h^{\delta_h}$$

der zu ξ gehörige Divisor genannt werden, weil durch ihn ξ nunmehr eindeutig bestimmt ist. Ist diese Zuordnung der Elemente $\xi, \xi', \xi'', \dots$ von $K(z,u)$ zu ihren Divisoren $\mathfrak{Q}_\xi, \mathfrak{Q}_{\xi'}, \mathfrak{Q}_{\xi''}, \dots$ ein für allemal gemacht, so erkennt man, daß man nun auch diese Divisoren durch die elementaren Rechenoperationen und durch Differentiation miteinander verbinden kann, wenn man unter

$$\mathfrak{Q}_\xi + \mathfrak{Q}_{\xi'}, \mathfrak{Q}_\xi - \mathfrak{Q}_{\xi'}, \mathfrak{Q}_\xi\,\mathfrak{Q}_{\xi'}, \frac{\mathfrak{Q}_\xi}{\mathfrak{Q}_{\xi'}}, \frac{d\mathfrak{Q}_\xi}{d\mathfrak{Q}_{\xi'}}$$

diejenigen eindeutig bestimmten Divisoren versteht, welche den Funktionen von $K(z,u)$

$$\xi+\xi',\ \xi-\xi',\ \xi\xi',\ \frac{\xi}{\xi'},\ \frac{d\xi}{d\xi'}$$

zugeordnet sind. Diese Divisoren bilden dann also ebenfalls einen Körper.

Neben denjenigen Divisoren $\mathfrak{Q}_\xi, \mathfrak{Q}_{\xi'}, \dots$, welche den einzelnen Elementen $\xi, \xi', \dots$ des Körpers eindeutig zugeordnet sind, muß man in der Theorie der algebraischen Funktionen ganz allgemein alle Divisoren:

$$\mathfrak{Q} = c\,\mathfrak{P}_1^{e_1}\mathfrak{P}_2^{e_2}\dots\mathfrak{P}_k^{e_k}$$

betrachten, welche aus beliebigen und beliebig vielen gleichen oder verschiedenen Primteilern multipliziert mit je einer beliebigen Konstanten bestehen, ganz unabhängig davon, ob ihnen eine Größe des Körpers entspricht oder nicht. Man ist zur Einführung dieser allgemeinen Divisoren deshalb gezwungen, weil der größte gemeinsame Teiler von zwei oder mehreren Funktionen des Körpers, um dessen Bestimmung es sich gerade in dieser Arbeit vielfach handelt, im allgemeinen nicht wieder dem Körper angehört, sondern eben ein solcher allgemeiner Divisor ist, und das gleiche gilt von denjenigen Divisoren, welche wir den allgemeinen Differentialen zuordnen müssen.

Man kann den Differentialen $dx, dx', dx'', \dots$ aller Elemente des

Körpers $K(z, u)$ ebenfalls gewisse Divisoren $\mathfrak{D}_{dx}, \mathfrak{D}_{dx'}, \mathfrak{D}_{dx''}, \ldots$ zuordnen, durch welche dieselben in gleicher Weise bestimmt sind, wie die Elemente $\xi, \xi', \ldots$ durch ihre Divisoren $\mathfrak{D}_\xi, \mathfrak{D}_{\xi'}, \ldots$. Sind nämlich etwa x und x' zwei beliebige nicht konstante Elemente des Körpers und $f(x, x') = 0$ die zwischen ihnen bestehende Gleichung niedrigsten Grades, also $f'_x\, dx + f'_{x'}\, dx' = 0$ die homogene lineare Gleichung zwischen ihren Differentialen, so folgt aus ihr, daß $dx, dx', dx'', \ldots$ proportional sind bestimmten Divisoren des Körpers. Ordnet man also einem jener Differentiale einen beliebigen Divisor zu, so ist damit jedem anderen ein solcher eindeutig zugeordnet. Diese Zuordnung werde nun durch die folgende Bestimmung gemacht:

Ist $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Punkt, π eine bestimmte Primfunktion für denselben, etwa $(z-a)^{\frac{1}{a}}$ bzw. $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{a}}$, so werde festgesetzt, daß der zu $d\pi$ gehörige Divisor $\mathfrak{D}_{d\pi}$ den zu $\mathfrak{P}$ gehörigen gleichbezeichneten Primteiler genau in der nullten Potenz enthalten soll. Hierdurch ist wegen der Gleichung $dx = \frac{dx}{d\pi} \cdot d\pi$ die in dem Divisor $\mathfrak{D}_{dx}$ enthaltene Potenz von $\mathfrak{P}$ eindeutig bestimmt; und das gleiche gilt bei den entsprechenden Festsetzungen für alle anderen Punkte $\mathfrak{P}', \mathfrak{P}'', \ldots$. In gleicher Weise kann die zu einem beliebigen Differentialteiler $\mathfrak{D}_{dx}$ gehörige Konstante c_0 durch die Festsetzung bestimmt werden, daß bei einem bestimmten Primteiler π_0 für den ausgezeichneten Punkt $\mathfrak{P}_0$ der Divisor $\mathfrak{D}_{d\pi_0}$ die Konstante 1 haben soll.

Die wichtigste, aber auch die schwierigste Aufgabe in der Theorie der algebraischen Funktionen sowie in der algebraischen Kurven- und Flächentheorie besteht nun darin, zu einer gegebenen rationalen Funktion beliebiger Elemente des Körpers $F\left(x, x', \ldots, \frac{dx}{d\xi}, \ldots\right)$, welche also selbst dem Körper angehört, den zugehörigen Divisor $\mathfrak{D}_F$ zu bestimmen. Noch allgemeiner kann diese Aufgabe so ausgesprochen werden, daß der größte gemeinsame Teiler mehrerer Funktionen $F(x, x', \ldots)$, $F_1(x, x', \ldots), \ldots$ oder ihrer Divisoren $\mathfrak{D}_F, \mathfrak{D}_{F_1}, \ldots$ gefunden werden soll. Jede Frage der analytischen Geometrie der algebraischen Kurven, jede Frage der höheren Integralrechnung kann vollständig auf dieses Problem zurückgeführt werden.

Praktisch kann man diese Aufgabe dadurch lösen, daß man für einen jeden Punkt $\mathfrak{P}$ die Entwicklungen von $x, x', \ldots \frac{dx}{d\xi}, \frac{dx'}{d\xi}, \ldots$ bildet und aus ihnen die Ordnungszahlen von $F, F_1, \ldots$ für die Stelle $\mathfrak{P}$ berechnet, aber in dieser Form führt die Lösung bei theoretischen Betrachtungen, auf die es hier hauptsächlich ankommt, nicht zu geschlossenen Ausdrücken für die gesuchten Divisoren.

In vielen Fällen wird aber die Untersuchung dadurch sehr wesentlich erleichtert, daß man von vornherein Invarianteneigenschaften der zu untersuchenden Divisoren $\mathfrak{D}_F, \ldots$ kennt, und dies tritt stets in der Theorie der *Abel*schen Integrale und in der Kurventheorie ein. Die wichtigsten Invarianteneigenschaften solcher Divisoren und die höchst einfachen Methoden, durch welche dann diese in geschlossener Form gefunden werden können, will ich in dieser Abhandlung auseinandersetzen. Einige dieser Methoden sind bereits, wenn auch noch nicht einheitlich und allgemein, in dem von mir in Gemeinschaft mit *Georg Landsberg* veröffentlichten Werke „Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und *Abel*sche Integrale", Leipzig 1902, angegeben worden, welches ich in dieser Arbeit kurz mit H. u. L. zitieren werde.

§ 1.

Die Transformations- und Differentiationsinvarianten und die homogenen Funktionen.

$x_0, x_1, \ldots x_s$ seien $s+1$ beliebige Funktionen des Körpers $K(z, u)$, ξ eine andere nicht konstante Funktion desselben; wir betrachten dann eine beliebige, z. B. eine ganze rationale Funktion der $(k+1)(s+1)$ Funktionen der folgenden Matrix:

$$(6.) \qquad \left(\frac{d^\lambda x_i}{d\xi^\lambda}\right) = \begin{pmatrix} x_0, & x_1, \ldots & x_s \\ \frac{dx_0}{d\xi}, & \frac{dx_1}{d\xi}, \ldots & \frac{dx_s}{d\xi} \\ \vdots & & \\ \frac{d^k x_0}{d\xi^k}, & \frac{d^k x_1}{d\xi^k}, \ldots & \frac{d^k x_s}{d\xi^k} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, \ldots k \\ i = 0, 1, \ldots s \end{pmatrix}$$

mit konstanten Koeffizienten, welche durch:

$$(6^a.) \qquad F\left(\left(\frac{d^\lambda x_i}{d\xi^\lambda}\right)\right)$$

bezeichnet werde, während der zugehörige Divisor wie vorher $\mathfrak{Q}_F$ sein soll.

Ich erinnere gleich hier an die geometrische und die analytische Bedeutung solcher Funktionen. Setzt man z. B. $F = \frac{dx}{d\xi}$ oder allgemeiner $F = x_0 \frac{dx_1}{d\xi}$, so liefert der zugehörige Divisor $\mathfrak{Q}_F$ im zweiten Falle den vollständigen Einblick in die analytische Natur der *Abel*schen Differentiale und Integrale. Macht man ferner die irreduktible Gleichung

$$(7.) \qquad F(x, y) = 0,$$

welche zwischen zwei nicht konstanten Funktionen des Körpers besteht und die wir als nicht linear voraussetzen wollen, durch die Substitution

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \; y = \frac{x_2}{x_0}$$

und darauf folgende Multiplikation mit einer geeigneten Potenz von x_0 ganz und homogen, so erhält man eine irreduktible homogene Gleichung

$$(7^a.) \qquad G(x_0, x_1, x_2) = 0,$$

und auf dem umgekehrten Wege zeigt man leicht, daß je drei Funktionen x_0, x_1, x_2 des Körpers stets durch eine irreduktible homogene Gleichung $(7^a.)$ mit konstanten Koeffizienten miteinander verbunden sind. Geometrisch stellt jede solche Gleichung eine algebraische Kurve, bezogen auf das Dreieckskoordinatensystem $(x_0 = 0, \; x_1 = 0, x_2 = 0)$, dar, und jede solche Kurve kann in dieser Weise unter Zugrundelegung eines geeigneten Körpers dargestellt werden. Sind x_0, x_1, x_2, x_3 vier nicht linear abhängige Elemente des Körpers, so stellen alle zusammengehörigen Wertsysteme derselben geometrisch eine algebraische Raumkurve, bezogen auf das Tetraederkoordinatensystem $(x_i = 0)$, dar.

Im ersten Falle sind dann bekanntlich die Linienkoordinaten der Kurventangenten im Punkte (x_0, x_1, x_2) den drei Unterdeterminanten des Systems

$$(8.) \qquad \begin{pmatrix} x_0, & x_1, & x_2 \\ \frac{dx_0}{d\xi}, & \frac{dx_1}{d\xi}, & \frac{dx_2}{d\xi} \end{pmatrix}$$

proportional, und die Gleichung

$$(8^a.) \qquad \begin{vmatrix} x_0, & x_1, & x_2 \\ \frac{dx_0}{d\xi}, & \frac{dx_1}{d\xi}, & \frac{dx_2}{d\xi} \\ \frac{d^2x_0}{d\xi^2}, & \frac{d^2x_1}{d\xi^2}, & \frac{d^2x_2}{d\xi^2} \end{vmatrix} = 0$$

liefert nach Weglassung eines bestimmten Faktors die Wendepunkte der Kurve. Im zweiten Falle sind die *Plücker*schen Linienkoordinaten der Tangenten an die Raumkurve im Punkte (x_0, x_1, x_2, x_3) proportional den sechs Unterdeterminanten der Matrix:

$$(8^{b}.) \qquad \begin{pmatrix} x_0, & x_1, & x_2, & x_3 \\ \frac{dx_0}{d\xi}, & \frac{dx_1}{d\xi}, & \frac{dx_2}{d\xi}, & \frac{dx_3}{d\xi} \end{pmatrix};$$

entsprechend sind die Koordinaten der Schmiegungsebene im gleichen Punkte proportional den vier Unterdeterminanten der Matrix

$$(8^{c}.) \qquad \begin{pmatrix} x_0, & x_1, & x_2, & x_3 \\ \frac{dx_0}{d\xi}, & \frac{dx_1}{d\xi}, & \frac{dx_2}{d\xi}, & \frac{dx_3}{d\xi} \\ \frac{d^2x_0}{d\xi^2}, & \frac{d^2x_1}{d\xi^2}, & \frac{d^2x_2}{d\xi^2}, & \frac{d^2x_3}{d\xi^2} \end{pmatrix},$$

und endlich liefert die eine Determinante vierter Ordnung

$$(8^{d}.) \qquad \left| \frac{d^{\lambda} x_i}{d\xi^{\lambda}} \right| \qquad (\lambda, i = 0, 1, 2, 3)$$

gleich Null gesetzt die sämtlichen Punkte, für welche Wendeberührungsebenen vorhanden sind.

Der Übergang von einem Fundamentaldreieck bzw. einem Fundamentaltetraeder zu einem anderen entspricht nun einer linearen umkehrbaren Transformation der Elemente (x_0, x_1, x_2) bzw. (x_0, x_1, x_2, x_3) mit konstanten Koeffizienten. Alle diejenigen Größen, welche in Beziehung zur Kurve selbst stehen, bleiben bei einer solchen Transformation ungeändert, und dasselbe gilt von dem zu einer solchen Funktion gehörigen Divisor, da ja durch ihn jene Größe eindeutig bestimmt ist. Ebenso bleibt ein solcher Divisor ungeändert, wenn die Differentiationsvariable ξ durch eine andere η ersetzt wird.

Ich betrachte nun ganz allgemein einen Divisor $\mathfrak{D}_{\xi}(x_0, x_1, \ldots x_s)$, welcher von beliebigen $s+1$ Elementen $x_0, x_1, \ldots x_s$ des betreffenden Körpers und von ihren ersten, zweiten, ... Ableitungen nach einem beliebigen anderen nicht konstanten Elemente ξ desselben Körpers abhängt, welcher also entweder zu einer rationalen Funktion $F(x_0, x_1, \ldots x_s)$ dieser Elemente gehört oder aber auch der größte gemeinsame Teiler mehrerer solcher zu $F_0(x_i)$, $F_1(x_i), \ldots$ gehörigen Divisoren sein kann. Einen solchen Divisor nenne ich eine *Transformationsinvariante* in bezug auf jene $s+1$ Elemente,

wenn er für jede umkehrbare lineare Transformation derselben mit konstanten Koeffizienten:

$$x_i = \sum_{k=0}^{s} \alpha_{ik}\, y_k, \qquad y_i = \sum_{k=0}^{s} \bar{\alpha}_{ik}\, x_k \qquad (i=0,\dots s)$$

ungeändert bleibt, wenn also

$$(9.) \qquad \mathfrak{Q}_\xi(x_0, x_1, \dots x_s) = \mathfrak{Q}_\xi(y_0, y_1, \dots y_s)$$

ist.

Zweitens werde ein solcher Divisor eine *Differentiationsinvariante* genannt, wenn er von der Wahl der Differentiationsvariablen ξ unabhängig ist, wenn also für eine beliebige neue Variable η desselben Körpers

$$(9^a.) \qquad \mathfrak{Q}_\xi(x_0, x_1, \dots x_s) = \mathfrak{Q}_\eta(x_0, x_1, \dots x_s)$$

ist.

Endlich werde noch jener Divisor *homogen von der nullten Dimension* genannt, wenn er ungeändert bleibt, falls alle Elemente x_i durch μx_i ersetzt werden, wo μ ein beliebiges variables oder konstantes Element des Körpers ist, wenn also

$$(9^b.) \qquad \mathfrak{Q}_\xi(x_0, x_1, \dots x_s) = \mathfrak{Q}_\xi(\mu x_0, \mu x_1, \dots \mu x_s)$$

ist. Jeder nicht homogene Divisor $\mathfrak{Q}_\xi(z_1, z_2, \dots z_s)$ von s Elementen z_i geht offenbar durch die Substitutionen $z_i = \frac{x_i}{x_0}$ in einen homogenen Divisor $\mathfrak{Q}_\xi(x_0, x_1, \dots x_s)$ von den $s+1$ Elementen $x_0, x_1, \dots x_s$ über, da bei der Verwandlung der x_k in μx_k ja die z_i, also auch $\mathfrak{Q}_\xi(\dots z_i \dots)$ ungeändert bleiben.

Hat ein Divisor $\mathfrak{Q}_\xi(x_0, x_1, \dots x_s)$ eine oder mehrere von jenen drei Invarianteneigenschaften, so ist er wesentlich einfacher zu bestimmen als im allgemeinen Falle. Ist $\mathfrak{Q}_\xi(x_0, x_1, \dots x_s)$ zuerst eine Transformationsinvariante, so kann man, um festzustellen, wie oft jener Divisor einen beliebig gegebenen Primteiler $\mathfrak{P}$ enthält, das System $(x_0, x_1, \dots x_s)$ durch eine umkehrbare lineare Transformation in ein äquivalentes System $(\delta_0, \delta_1, \dots \delta_s)$ überführen, welches für den zugehörigen Punkt $\mathfrak{P}$ besonders einfach ist.

Ist nämlich (vgl. H. u. L. S. 452 ff.) $\mathfrak{P}^{\beta_0}$ die höchste Potenz von $\mathfrak{P}$, welche in allen $s+1$ Elementen x_i, also in ihrem größten gemeinsamen Teiler:

$$(10.) \qquad \mathfrak{Z}_0 = (x_0, x_1, \dots x_s)$$

enthalten ist, so kann man das erste Element δ_0 unter den x_i so auswählen, daß es *genau* durch $\mathfrak{P}^{\beta_0}$ teilbar ist und sein Anfangsglied den Koeffizienten Eins hat, und hierauf kann man die übrigen Elemente x_k durch Subtraktion je eines Gliedes $c\delta_0$ (wo c eine geeignet gewählte Konstante bedeutet) so umformen, daß sie alle durch eine höhere als die β_0^{te} Potenz von $\mathfrak{P}$ teilbar sind. Ist $\mathfrak{P}^{\beta_1}$ die niedrigste unter jenen Potenzen und δ_1 ein Element, welches *genau* diese Potenz von $\mathfrak{P}$ enthält, so kann man dieses als zweites Element des neuen Systems wählen und nun die übrigen $s-1$ Elemente in gleicher Weise behandeln; so erhält man zuletzt ein äquivalentes System $(\delta_0, \delta_1, \dots \delta_s)$, in welchem jedes folgende Element eine höhere Potenz von $\mathfrak{P}$ enthält als das vorhergehende. Sind

$$\mathfrak{P}^{\beta_0}, \mathfrak{P}^{\beta_1}, \mathfrak{P}^{\beta_2}, \dots \mathfrak{P}^{\beta_s} \tag{11.}$$

die in $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots \delta_s$ enthaltenen Potenzen von $\mathfrak{P}$, so bilden die Exponenten eine eindeutig bestimmte Reihe von zunehmenden ganzen Zahlen, und dasselbe kann für jeden der Punkte $\mathfrak{P}', \mathfrak{P}'', \dots$ der *Riemann*schen Fläche ausgeführt werden. Ein solches System $(\delta_0, \delta_1, \dots \delta_s)$ soll als ein *reguläres System für den Punkt $\mathfrak{P}$ oder den zugehörigen Primteiler* bezeichnet werden. Im allgemeinen sind alle Exponenten β_i endliche Zahlen. Ist eine derselben etwa $\beta_{\sigma+1} = +\infty$ aber β_σ noch endlich, ist also $\delta_{\sigma+1} = 0$, aber $\delta_\sigma \gtrless 0$, so sind auch alle folgenden $\delta_{\sigma+2} = \dots = 0$, und die Elemente $(x_0, x_1, \dots x_s)$ sind linear abhängig und durch nur $\sigma+1$ linear unabhängige, etwa $(\delta_0, \delta_1, \dots \delta_\sigma)$, linear und homogen darstellbar. Ein solches System heißt vom Range $\sigma+1$.

Es sei zweitens der zu untersuchende Divisor eine Differentiationsinvariante, also $\mathfrak{Q}_\xi(x_i) = \mathfrak{Q}_\eta(x_i)$ unabhängig von der Differentiationsvariablen ξ oder η. Dann und nur dann kann jener Divisor als allein abhängig von den Differentialen $d^i x_k$ angesehen und durch $\mathfrak{Q}(d^i x_0, d^i x_1, \dots d^i x_s)$ bezeichnet werden; und ich verstehe dann unter diesem Divisor denjenigen $\mathfrak{Q}\left(\frac{d^i x_0}{d\xi^i}, \dots \frac{d^i x_s}{d\xi^i}\right)$, welcher zu den entsprechenden Differentialquotienten $\frac{d^i x_k}{d\xi^i}$ für irgend eine Differentiationsvariable ξ gehört. Ist $\mathfrak{Q}_\xi(x_0, x_1, \dots x_s)$ sowohl eine Transformations- als auch eine Differentiationsinvariante, so kann, um die in ihm enthaltene Potenz eines beliebigen Primteilers $\mathfrak{P}$ zu bestimmen, erstens $(x_0, x_1, \dots x_s)$ durch ein zu $\mathfrak{P}$ gehöriges reguläres

System $(\delta_0, \delta_1, \ldots \delta_s)$ ersetzt und zweitens als Differentiationsvariable eine Primfunktion $\pi = (x-a)^{\frac{1}{a}}$ bzw. $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{a}}$ für diese Stelle gewählt werden. Ist dann allgemein $\delta_k = \pi^{\beta_k} + \cdots$, so erhält man für die Ableitungen die Entwicklungen:

$$\frac{d^i \delta_k}{d\pi^i} = \beta_k (\beta_k - 1) \ldots (\beta_k - i + 1)\, \pi^{\beta_k - i} + \cdots,$$

aus denen die gesuchte Potenz von $\mathfrak{P}$ leicht berechnet werden kann.

Es sei endlich $\mathfrak{Q}_\xi (x_0, x_1, \ldots x_s)$ homogen von der nullten Dimension in bezug auf die $s+1$ Elemente x_i, so daß also für jede Funktion μ des Körpers $K(x, y)$ stets $\mathfrak{Q}_\xi (\mu x_0, \mu x_1, \ldots \mu x_s) = \mathfrak{Q}_\xi (x_0, x_1, \ldots x_s)$ ist. Dann kann die Bestimmung dieses Divisors durch die folgende Betrachtung vereinfacht werden: Es seien

$$\mathfrak{Q}_{x_0}, \mathfrak{Q}_{x_1}, \ldots \mathfrak{Q}_{x_s}$$

die zu $x_0, x_1, \ldots x_s$ gehörigen Divisoren, welche also sämtlich der sog. Hauptklasse:

$$E = (\mathfrak{Q}_x, \mathfrak{Q}_{x'}, \mathfrak{Q}_{x''}, \ldots)$$

aller derjenigen Divisoren angehören, die den sämtlichen Funktionen $x, x', x'', \ldots$ des Körpers $K(x, y)$ zugeordnet sind.

Alle übrigen Divisoren kann man nun (vgl. H. u. L. S. 251) ebenfalls in Klassen Q einteilen, wenn man festsetzt, daß alle und nur die Divisoren $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}', \ldots$ in eine und dieselbe Klassse

$$Q = (\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}', \mathfrak{Q}'', \ldots)$$

gehören sollen, welche sich von einander nur um Faktoren der Hauptklasse unterscheiden, oder, was dasselbe ist, welche aus den Divisoren der Hauptklasse E durch Multiplikation mit einem und demselben ganz beliebig innerhalb Q ausgewählten Divisor $\mathfrak{Q}_0$, dem sog. Multiplikator, hervorgehen. Es ist also allgemein:

$$Q = E\,\mathfrak{Q}_0 = (\mathfrak{Q}_x \mathfrak{Q}_0, \mathfrak{Q}_{x'} \mathfrak{Q}_0, \mathfrak{Q}_{x''} \mathfrak{Q}_0, \ldots) = (\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}', \mathfrak{Q}'', \ldots),$$

oder durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{Q}^{(i)} = \mathfrak{Q}_{x^{(i)}}\, \mathfrak{Q}_0, \text{ d. h.: } \mathfrak{Q}_{x^{(i)}} = \frac{\mathfrak{Q}^{(i)}}{\mathfrak{Q}_0}$$

entspricht jedem Divisor von Q eindeutig ein solcher der Hauptklasse;

bei anderer Wahl des Multiplikators $\mathfrak{Q}_0$ innerhalb Q wird nur die Zuordnung der Divisoren von E und Q geändert.

Es sei nun $\mathfrak{Q}_\xi(x_0, x_1, \dots x_s) = \mathfrak{Q}_\xi(\mathfrak{Q}_{x_0}, \mathfrak{Q}_{x_1}, \dots \mathfrak{Q}_{x_s})$ der zu untersuchende Divisor, und es mögen $\mathfrak{Q}^{(0)}, \mathfrak{Q}^{(1)}, \dots \mathfrak{Q}^{(s)}$ diejenigen Divisoren einer beliebigen Klasse Q bezeichnen, welche den Divisoren $\mathfrak{Q}_{x_0}, \mathfrak{Q}_{x_1}, \dots \mathfrak{Q}_{x_s}$ der Hauptklasse unter Zugrundelegung irgend eines Multiplikators $\mathfrak{Q}_0$ entsprechen; dann ist allgemein $x_i = \frac{\mathfrak{Q}^{(i)}}{\mathfrak{Q}_0}$, und der zu untersuchende Divisor kann also auch in der Form $\mathfrak{Q}_\xi\left(\frac{\mathfrak{Q}^{(0)}}{\mathfrak{Q}_0}, \frac{\mathfrak{Q}^{(1)}}{\mathfrak{Q}_0}, \dots \frac{\mathfrak{Q}^{(s)}}{\mathfrak{Q}_0}\right)$ geschrieben werden. So erscheint also dieser Divisor als abhängig von den $s+1$ Divisoren $\mathfrak{Q}^{(i)}$ der Klasse Q und außerdem noch von dem Multiplikator $\mathfrak{Q}_0$; unter der jetzt gemachten Voraussetzung der Homogenität von $\mathfrak{Q}_\xi$ ergibt sich aber, daß seine Abhängigkeit von dem Multiplikator $\mathfrak{Q}_0$ nur eine scheinbare ist. Ist nämlich $\mathfrak{Q}_0'$ irgend ein anderer Divisor derselben Klasse Q, so ist $\frac{\mathfrak{Q}_0}{\mathfrak{Q}_0'} = \mu$ ein Divisor der Hauptklasse, also ein Element des Körpers K, und hieraus folgt in der Tat, daß

$$\mathfrak{Q}_\xi(\dots \mu x_i \dots) = \mathfrak{Q}_\xi\left(\dots \frac{\mathfrak{Q}^{(i)}}{\mathfrak{Q}_0} \cdot \frac{\mathfrak{Q}_0}{\mathfrak{Q}_0'}, \dots\right) = \mathfrak{Q}_\xi\left(\dots \frac{\mathfrak{Q}^{(i)}}{\mathfrak{Q}_0'} \dots\right)$$

von der Wahl des gemeinsamen Nenners $\mathfrak{Q}_0$ oder $\mathfrak{Q}_0'$ innerhalb Q unabhängig ist.

Nur unter der Voraussetzung der Homogenität von $\mathfrak{Q}_\xi$ kann und will ich diesen Divisor also als allein abhängig von den $s+1$ Divisoren $\mathfrak{Q}^{(0)}, \mathfrak{Q}^{(1)}, \dots \mathfrak{Q}^{(s)}$ dieser Klasse Q ansehen, welche den Elementen $x_0, x_1, \dots x_s$ der Hauptklasse bei der Wahl eines ganz beliebigen Divisors $\mathfrak{Q}_0$ zugeordnet sind; um dies auch in der Bezeichnung zum Ausdruck zu bringen, soll er auch in der Form:

$$\mathfrak{Q}_\xi(\mathfrak{Q}^{(0)}, \mathfrak{Q}^{(1)}, \dots \mathfrak{Q}^{(s)})$$

geschrieben werden. Unter diesem von $s+1$ Divisoren $\mathfrak{Q}^{(i)}$ einer beliebigen Klasse Q abhängigen Divisor soll also derjenige Teiler $\mathfrak{Q}_\xi(x_0, x_1, \dots x_s)$ verstanden werden, für welchen die Elemente x_i den entsprechenden Divisoren $\mathfrak{Q}^{(i)}$ proportional sind, so daß also

$$x_0 : x_1 : \dots : x_s = \mathfrak{Q}^{(0)} : \mathfrak{Q}^{(1)} : \dots : \mathfrak{Q}^{(s)}$$

ist. Nur unter dieser Voraussetzung der Homogenität können und sollen

also auch die Ableitungen $\frac{d^i \mathfrak{Q}^{(k)}}{d\xi^i}$ jener Divisoren nach einer beliebigen Differentiationsvariablen in die Rechnung eingeführt werden.

§ 2.

Die Fundamentalinvarianten einer Schar $(x_0, x_1, \ldots x_s)$.

Die im vorigen Abschnitt gefundenen allgemeinen Ergebnisse will ich nun zur Bestimmung der wichtigsten, mit einem System $(x_0, x_1, \ldots x_s)$ von beliebigen Elementen des Körpers $K(z, u)$ zusammenhängenden Divisoren anwenden.

Es bezeichne für eine beliebige Differentiationsvariable ξ

$$(12.) \qquad \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} x_0, & x_1, \ldots & x_s \\ \frac{dx_0}{d\xi}, & \frac{dx_1}{d\xi}, \ldots & \frac{dx_s}{d\xi} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d^l x_0}{d\xi^l}, & \frac{d^l x_1}{d\xi^l}, \ldots & \frac{d^l x_s}{d\xi^l} \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle = \left(\left(\frac{d^k x_i}{d\xi^k}\right)\right) \qquad (k=0, 1, \ldots l)$$

den größten gemeinsamen Teiler aller Determinanten $(l+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche aus der $(l+1)$-reihigen Matrix $\left(\frac{d^k x_i}{d\xi^k}\right)$ gebildet werden können. Alle diese Divisoren für $l = 0, 1, \ldots s$ sind offenbar Transformationsinvarianten. Ist nämlich

$$x_q = \Sigma\, \alpha_{qr}\, y_r \qquad (q, r=0, 1, \ldots s)$$

irgend eine umkehrbare lineare Transformation mit konstanten Koeffizienten, so folgen aus diesen Gleichungen durch ein- oder mehrmalige Differentiation nach ξ die weiteren:

$$\frac{d^k x_q}{d\xi^k} = \Sigma\, \alpha_{qr} \cdot \frac{d^k y_r}{d\xi^k};$$

jede Matrix $\left(\frac{d^k x_i}{d\xi^k}\right)$ hängt also mit der entsprechenden transformierten Matrix $\left(\frac{d^k y_i}{d\xi^k}\right)$ durch eine Kompositionsgleichung:

$$(13.) \qquad \left(\frac{d^k x_i}{d\xi^k}\right) = \left(\frac{d^k y_i}{d\xi^k}\right)(\bar{\alpha}_{ik})$$

zusammen, in welcher hier, wie im folgenden stets, $(\bar{\alpha}_{ik})$ das transponierte System zu (α_{ik}) bedeutet. Also sind die Unterdeterminanten $(k+1)^{\text{ter}}$

Ordnung der Matrix $\left(\frac{d^k x_i}{d\xi^k}\right)$ homogen und linear durch diejenigen der transformierten Matrix $\left(\frac{d^k y_i}{d\xi^k}\right)$ darstellbar und umgekehrt; beide haben also wirklich denselben größten gemeinsamen Teiler.

Dagegen sind diese Divisoren noch keine Differentiationsinvarianten, können aber dazu durch Multiplikation mit einer Potenz von $d\xi$ gemacht werden. Ersetzt man nämlich die Differentiationsvariable ξ durch eine andere η, so bestehen für die sukzessiven Ableitungen eines beliebigen Elementes x nach ξ und nach η die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x &= 1 \cdot x \\
\frac{dx}{d\eta} &= 0 \cdot x + \xi' \cdot \frac{dx}{d\xi} \\
\frac{d^2x}{d\eta^2} &= 0 \cdot x + \xi'' \cdot \frac{dx}{d\xi} + \xi'^2 \cdot \frac{d^2x}{d\xi^2} \\
&\vdots \\
\frac{d^\lambda x}{d\eta^\lambda} &= g_{0\lambda} \cdot x + g_{1\lambda} \cdot \frac{dx}{d\xi} + g_{2\lambda} \cdot \frac{d^2x}{d\xi^2} + \cdots + g_{\lambda\lambda} \cdot \frac{d^\lambda x}{d\xi^\lambda} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;
\end{aligned}$$

hier bedeuten $\xi', \xi'', \ldots$ die erste, zweite, ... Ableitung von ξ nach η, und allgemein sind die Koeffizienten $g_{0\lambda}, g_{1\lambda}, \ldots g_{\lambda\lambda}$ ganze ganzzahlige rationale Funktionen von $\xi', \xi'', \ldots$. Durch nochmalige Differentiation der $(\lambda+1)^{\text{ten}}$ Gleichung nach η überzeugt man sich sofort, daß jene Koeffizienten $g_{\varkappa\lambda}$ mit einander durch die folgende einfache Rekursionsgleichung verbunden sind:

$$g_{\varkappa+1,\,\lambda+1} = \xi'\, g_{\varkappa\lambda} + \frac{d\, g_{\varkappa+1,\,\lambda}}{d\eta}.$$

Hieraus allein kann induktiv geschlossen werden, daß die Koeffizienten $g_{0\lambda}, g_{1\lambda}, \ldots g_{\lambda\lambda}$ ganze ganzzahlige homogene Funktionen der nullten, ersten, ... λ^{ten} Dimension von $\xi', \xi'', \ldots$ sind, in denen die Indexsumme jedes einzelnen Produktes gleich λ ist; speziell ergibt sich aus derselben Formel, daß stets:

$$(13^a.) \qquad g_{\lambda\lambda} = \xi'^{\lambda} = \left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^{\lambda}$$

ist.

Hieraus folgt, daß beim Übergang von der Differentiationsvari-

ablen ξ zu η die neue Matrix $\left(\frac{d^h x_i}{d\eta^h}\right)$ mit der ursprünglichen $\left(\frac{d^h x_i}{d\xi^h}\right)$ durch die Kompositionsgleichung:

$$\left(\frac{d^h x_i}{d\eta^h}\right) = \left(\frac{d^h x_i}{d\xi^h}\right)(\bar{g}_{\varkappa\lambda}) \qquad (h=0,1,..l) \tag{14.}$$

zusammenhängt, in welcher wieder $(\bar{g}_{\varkappa\lambda})$ das transponierte System zu dem Dreieckssysteme

$$(g_{\varkappa\lambda}) = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 \dots 0 \\ g_{01} & g_{11} & 0 \dots 0 \\ \vdots & & \\ g_{0l} & g_{1l} & g_{2l} \cdots g_{ll} \end{pmatrix}$$

bedeutet, dessen Determinante nach (13ª.) gleich

$$|g_{\varkappa\lambda}| = g_{00}\, g_{11} \cdots g_{ll} = \left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^{\frac{l(l+1)}{2}}$$

ist, also die höheren Ableitungen $\xi'', \xi''', \dots$ gar nicht enthält. Also ist in der Tat der Divisor $\left(\left(\frac{d^h x_i}{d\xi^h}\right)\right)$ keine Differentiationsinvariante, da er sich bei dem Übergang zu der neuen Differentiationsvariablen η mit $\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^{\frac{l(l+1)}{2}}$ multipliziert. Dagegen sind die $s+1$ Divisoren:

$$\left(\left(\begin{matrix} x_0, & x_1, \dots\dots & x_s \\ \frac{dx_0}{d\xi}, & \frac{dx_1}{d\xi}, \cdots & \frac{dx_s}{d\xi} \\ \vdots & & \\ \frac{d^l x_0}{d\xi^l}, & \frac{d^l x_1}{d\xi^l}, \cdots & \frac{d^l x_s}{d\xi^l} \end{matrix}\right)\right) d\xi^{\frac{l(l+1)}{2}} \qquad (l=0,1,..s) \tag{14ª.}$$

sowohl Transformations- als auch Differentiationsinvarianten; in der Tat wird ja die erste Eigenschaft durch die Hinzufügung jener Potenz von $d\xi$ nicht geändert, und beim Übergang von ξ zu η multipliziert sich der erste Faktor mit $\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^{\frac{l(l+1)}{2}}$, während der zweite in $d\eta^{\frac{l(l+1)}{2}} = \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^{\frac{l(l+1)}{2}} d\xi^{\frac{l(l+1)}{2}}$ übergeht. Diese Divisoren sind also von den Differentialen $d^l x_i$ allein abhängig und können auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\left\langle\left\langle \begin{matrix} x_0, & x_1, \ldots . & x_s \\ dx_0, & dx_1, \ldots . & dx_s \\ \vdots & & \\ d^l x_0, & d^l x_1, \ldots & d^l x_s \end{matrix}\right\rangle\right\rangle .$$

Diese $s+1$ Invarianten sind endlich auch homogen, aber nicht von der nullten, sondern der Reihe nach von der ersten, zweiten, ... $(s+1)^{\text{ten}}$ Dimension; sie können aber durch Hinzufügung geeigneter Faktoren leicht auf homogene Divisoren nullter Dimension zurückgeführt werden.

Ist nämlich wieder μ ein beliebiges Element des Körpers, und ersetzt man die Elemente x_i durch μx_i, so folgt aus den bekannten für jedes $x = x_i$ geltenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\mu x = \mu x \\ &\frac{d(\mu x)}{d\xi} = \frac{d\mu}{d\xi} \cdot x + \mu \frac{dx}{d\xi} \\ &\frac{d^2(\mu x)}{d\xi^2} = \frac{d^2\mu}{d\xi^2} \cdot x + 2\frac{d\mu}{d\xi} \cdot \frac{dx}{d\xi} + \mu \cdot \frac{d^2 x}{d\xi^2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

daß jede der $s+1$ transformierten Matrizen $\left(\frac{d^h(\mu x_i)}{d\xi^h}\right)$ mit der entsprechenden ursprünglichen durch eine Kompositionsgleichung:

$$\left(\frac{d^h(\mu x_i)}{d\xi^h}\right) = \left(\frac{d^h x_i}{d\xi^h}\right)(\bar{h}_{\varkappa\lambda}) \tag{15.}$$

zusammenhängt, wo $(h_{\varkappa\lambda})$ das Dreieckssystem $(l+1)^{\text{ter}}$ Ordnung bedeutet:

$$(h_{\varkappa\lambda}) = \begin{pmatrix} \mu, & 0, & 0, \ldots 0 \\ \frac{d\mu}{d\xi}, & \mu, & 0, \ldots 0 \\ \frac{d^2\mu}{d\xi^2}, & 2\frac{d\mu}{d\xi}, & \mu, \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \ldots \mu \end{pmatrix}, \qquad (\varkappa, \lambda = 0, 1, \ldots l)$$

dessen Diagonalelemente alle gleich μ sind, während alle übrigen ganzzahlige Multipla der Ableitungen $\frac{d\mu}{d\xi}, \frac{d^2\mu}{d\xi^2}, \ldots$ werden; also ist $|h_{\varkappa\lambda}| = \mu^{l+1}$. Ersetzt man also jedes x_i durch μx_i, so multipliziert sich jede der Determinanten $(l+1)^{\text{ter}}$ Ordnung von $(14^{\text{a}}.)$, also auch der ganze Divisor mit

μ^{l+1}, und damit ist bewiesen, daß jener Divisor die beiden ersten Invarianteneigenschaften hat und außerdem homogen von der $(l+1)^{\text{ten}}$ Dimension ist.

Genau dieselben drei Eigenschaften besitzt offenbar auch die $(l+1)^{\text{te}}$ Potenz des größten gemeinsamen Teilers $\mathfrak{Z} = (x_0, x_1, \dots x_s)$ jener $s+1$ Elemente x_i. Hieraus folgt, daß für jedes $l = 0, 1, \dots$ die folgenden Divisoren:

$$(16.) \quad \Delta_l(x_0, x_1, \dots x_s) = \frac{\left\| \begin{matrix} x_0, & x_1, \dots & x_s \\ \frac{dx_0}{d\xi}, & \frac{dx_1}{d\xi}, \dots & \frac{dx_s}{d\xi} \\ \vdots & & \\ \frac{d^l x_0}{d\xi^l}, & \frac{d^l x_1}{d\xi^l}, \dots & \frac{d^l x_s}{d\xi^l} \end{matrix} \right\| \cdot d\xi^{\frac{l(l+1)}{2}}}{(x_0, x_1, \dots \dots x_s)^{l+1}}$$

alle drei vorher angegebenen Invarianteneigenschaften besitzen müssen, und sie sind die wichtigsten in der ganzen Theorie der algebraischen Funktionen und der ganzen Kurventheorie auftretenden Invarianten.

Die erste dieser Invarianten Δ_0 ist offenbar gleich 1, von den folgenden sind $\Delta_{s+1} = \Delta_{s+2} = \dots = 0$, die $s+1$ übrigen $\Delta_0, \Delta_1, \dots \Delta_s$ sind dann und nur dann alle von Null verschieden, also endliche Divisoren, wenn $x_0, x_1, \dots x_s$ linear unabhängig sind. Ist das nicht der Fall und ist das System $(x_0, x_1, \dots x_s)$ vom Range $\sigma+1$, also äquivalent einem System $(\delta_0, \delta_1, \dots \delta_\sigma)$ von nur $\sigma+1$ Elementen, so sind $\Delta_0, \Delta_1, \dots \Delta_\sigma$ endliche Divisoren, während alle folgenden Null sind.

Ist allgemein $x_i = \frac{\mathfrak{Q}^{(i)}}{\mathfrak{Q}_0}$, wo $\mathfrak{Q}_0$ der Generalnenner aller x_i ist, wo also die $s+1$ Zähler teilerfremde ganze Divisoren einer Klasse Q sind, so ist wegen der dritten Invarianteneigenschaft jeder Divisor Δ_l von $\mathfrak{Q}_0$ unabhängig, und wegen der zweiten Invarianteneigenschaft ist er auch nur von den Differentialen $d\mathfrak{Q}^{(i)}$, nicht aber von der Differentiationsvariablen ξ abhängig. Da endlich außerdem $(\mathfrak{Q}^{(0)}, \mathfrak{Q}^{(1)}, \dots \mathfrak{Q}^{(s)}) = 1$ ist, so erhält man die folgende einfachste Darstellung jener Fundamentalinvarianten:

$$(16^a.)\quad \Delta_l(x_0, x_1, \dots x_s) = \left\|\left\| \begin{matrix} \mathfrak{Q}^{(0)}, & \mathfrak{Q}^{(1)}, \dots & \mathfrak{Q}^{(s)} \\ d\mathfrak{Q}^{(0)}, & d\mathfrak{Q}^{(1)}, \dots & d\mathfrak{Q}^{(s)} \\ \vdots & & \\ d^l\mathfrak{Q}^{(0)}, & d^l\mathfrak{Q}^{(1)}, \dots & d^l\mathfrak{Q}^{(s)} \end{matrix} \right\|\right\|.$$

§ 3.

Die zu den Fundamentalinvarianten gehörigen Divisoren. Anwendungen.

Es soll nun allgemein untersucht werden, wie oft ein beliebiger Primteiler $\mathfrak{P}$ in irgend einer von jenen Fundamentalinvarianten $\Delta_l(x_i)$ in (16.) enthalten ist. Wegen der Homogenität von Δ_l kann hier zunächst vorausgesetzt werden, daß der größte gemeinsame Teiler $(x_0, x_1, \dots x_s)$ jener $s+1$ Elemente $\mathfrak{P}$ nicht enthält, weil dies durch die Substitution von μx_i an Stelle von x_i für ein geeignet gewähltes μ stets erreicht werden kann. Dann kann also der Nenner $(x_0, x_1, \dots x_s)^{l+1}$ von Δ_l fortgelassen werden. Da Δ_l zweitens Differentiationsinvariante ist, so kann für ξ ein Primteiler π für die Stelle $\mathfrak{P}$, also $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$ bzw. $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, als Differentiations-

variable gewählt werden. Dann kann in Δ_l auch der Faktor $d\pi^{\frac{l(l+1)}{2}}$ fortgelassen werden, da der zu $d\pi$ gehörige Divisor nach der auf S. 128 gemachten Festsetzung $\mathfrak{P}$ nicht enthält. Endlich kann und soll das System $(x_0, x_1, \dots x_s)$ durch ein äquivalentes für die Stelle $\mathfrak{P}$ reguläres System $(\delta_0, \delta_1, \dots \delta_s)$ ersetzt werden. Hier ist die Ordnungszahl γ_0 des ersten Elementes δ_0 gleich Null, weil n. d. V. der größte gemeinsame Teiler der x_i, also auch der δ_i, genau durch $\mathfrak{P}^0$ teilbar angenommen werden konnte, und die entsprechenden Ordnungszahlen $\gamma_1, \dots \gamma_s$ von $\delta_1, \dots \delta_s$ bilden eine wachsende Reihe positiver ganzer Zahlen, so daß allgemein $\gamma_i \geqq i$ ist. Bezeichnet man für ein ganz beliebiges System $(x_0, x_1, \dots x_s)$ jene Ordnungszahlen wie auf S. 133 durch $(\beta_0, \beta_1, \dots \beta_s)$, während sie für das jetzt zugrunde gelegte $(\mu x_0, \mu x_1, \dots \mu x_s)$ gleich $(0, \gamma_1, \dots \gamma_s)$ genannt werden, so hängen jene Ordnungszahlen β_i und γ_i offenbar durch die Gleichungen

$$\gamma_i = \beta_i - \beta_0 \qquad (i=0, 1, \dots s)$$

zusammen.

Hiernach ist also nur die höchste Potenz von π zu bestimmen, welche in allen Determinanten $(l+1)^{\text{ter}}$ Ordnung der $(l+1)$-reihigen Matrix

$$\begin{pmatrix} \delta_0, & \delta_1, \dots \delta_l, & \dots \delta_s \\ \delta_0', & \delta_1', \dots \delta_l', & \dots \delta_s' \\ \vdots & & \\ \delta_0^{(l)}, & \delta_1^{(l)}, \dots \delta_l^{(l)}, & \dots \delta_s^{(l)} \end{pmatrix}$$

enthalten ist, in welcher allgemein $\delta_k^{(i)} = \frac{d^i \delta_k}{d\pi^i}$ bedeutet.

Man erkennt nun leicht, daß die Entwicklung der ersten Determinante dieses Systems:

$$\begin{vmatrix} \delta_0, & \delta_1, \dots \delta_l \\ \delta_0', & \delta_1', \dots \delta_l' \\ \vdots & \\ \delta_0^{(l)}, & \delta_1^{(l)}, \dots \delta_l^{(l)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pi^{\gamma_0} + \cdots, & \pi^{\gamma_1} + \cdots, & \cdots\cdots\cdots, & \pi^{\gamma_l} + \cdots \\ \gamma_0 \pi^{\gamma_0 - 1} + \cdots, & \gamma_1 \pi^{\gamma_1 - 1} + \cdots, & \cdots, & \gamma_l \pi^{\gamma_l - 1} + \cdots \\ \gamma_0(\gamma_0 - 1)\pi^{\gamma_0 - 2} + \cdots, & \cdots, & \gamma_l(\gamma_l - 1)\pi^{\gamma_l - 2} + \cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \end{vmatrix}$$

das niedrigste Anfangsglied besitzt. Jedes der in ihr auftretenden Produkte $\pm \delta_{i_0} \delta_{i_1}' \dots \delta_{i_l}^{(l)}$ beginnt nämlich genau mit

$$\pi^{\gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_l - (1 + 2 + \cdots + l)} = \pi^{(\gamma_1 - 1) + (\gamma_2 - 2) + \cdots + (\gamma_l - l)},$$

da $\gamma_0 = 0$ ist, und der zu diesem Anfangsgliede gehörige Zahlkoeffizient ist die aus den Anfangskoeffizienten der $\delta_k^{(i)}$ gebildete Determinante $(l+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche, wie bekannt und leicht zu erweisen, gleich dem Differenzenprodukt der Zahlen γ_i also von Null verschieden ist. Da jede andere von diesen Determinanten $(l+1)^{\text{ter}}$ Ordnung genau ebenso wie diese gebildet ist, aber ein größeres System von Ordnungszahlen γ hat, so ist jede von ihnen durch die erste teilbar, und da allgemein $\gamma_i \geqq i$ ist, so ergibt sich der folgende Satz:

> Alle Fundamentalinvarianten $\Delta_l(x_i)$ sind ganze Divisoren, welche durch die über alle Punkte $\mathfrak{P}$ der *Riemann*schen Fläche zu erstreckenden Produkte dargestellt sind:

$$(17.) \qquad \Delta_l(x_0, x_1, \dots x_s) = \prod_{(\mathfrak{P})} \mathfrak{P}^{(\gamma_1 - 1) + (\gamma_2 - 2) + \cdots + (\gamma_l - l)}.$$

Sie sind, wie auf S. 140 bewiesen wurde, endliche Divisoren, sobald $(x_0, x_1, \dots x_s)$ linear unabhängig sind; es gibt also dann nur eine endliche Anzahl von regulären Punkten $\mathfrak{P}$, für welche wenigstens ein $\gamma_i > i$ ist.

Von diesen ganzen Divisoren $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_s$ ist offenbar jeder durch den nächst vorhergehenden teilbar, denn jeder der $s+1$ Quotienten

$$(17^a.) \qquad \mathfrak{E}_l(x_0, x_1, \dots x_s) = \frac{\Delta_l(x_0, x_1, \dots x_s)}{\Delta_{l-1}(x_0, x_1, \dots x_s)} = \prod_{(\mathfrak{P})} \mathfrak{P}^{\gamma_l - l} \qquad (l = 0, 1, \dots s)$$

ist ein ganzer endlicher Divisor, da nach der oben gemachten Bemerkung für jeden beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ $\gamma_l \geqq l$ ist. Wir haben (H. u. L. S. 458) dieselben *die Differentialteiler der Schar* $(x_0, x_1, \dots x_s)$ genannt und schon dort hervorgehoben, daß sie eine gewisse Verwandtschaft mit den Elementarteilern des Systems $(x_k^{(i)})$ besitzen; sie sind aber mit diesen nicht identisch, denn $\Delta_l(x_0, \dots x_s)$ ist ja, wie leicht zu sehen, nur der größte gemeinsame Teiler aller Unterdeterminanten $(l+1)^{\text{ter}}$ Ordnung aus den $(l+1)$ *ersten* Zeilen des $(s+1)$-reihigen quadratischen Systemes $(x_k^{(i)})$, aber nicht aus *allen* Determinanten $(l+1)^{\text{ter}}$ Ordnung desselben.

Jene Differentialteiler $\mathfrak{E}_l(x_0, x_1, \dots x_s)$ haben aber mit den Elementarteilern die Eigenschaft gemeinsam, daß jeder ein Multiplum des nächst vorhergehenden ist, denn es ist ja:

$$\frac{\mathfrak{E}_l(x_i)}{\mathfrak{E}_{l-1}(x_i)} = \mathfrak{Z}_l(x_0, x_1, \dots x_s) = \prod_{(\mathfrak{P})} \mathfrak{P}^{\gamma_l - \gamma_{l-1} - 1}$$

ein ganzer Divisor, da ja stets $\gamma_l > \gamma_{l-1}$ ist (vgl. auch H. u. L. a. a. O.). Ersetzt man wieder die Exponenten γ_i durch ihre Werte $\beta_i - \beta_0$ und setzt man endlich allgemein $\beta_i - \beta_{i-1} = \alpha_i$, so daß jetzt die in dem regulären Systeme $(\delta_0, \delta_1, \dots \delta_s)$ enthaltenen Potenzen $\mathfrak{P}^{\beta_0}, \mathfrak{P}^{\beta_1}, \dots \mathfrak{P}^{\beta_s}$ durch

$$\mathfrak{P}^{\alpha_0}, \mathfrak{P}^{\alpha_0+\alpha_1}, \mathfrak{P}^{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2}, \dots \mathfrak{P}^{\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_s}$$

bezeichnet sind, wo α_0 positiv, Null oder negativ sein kann, während $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$ positive ganze Zahlen sind, so ergibt sich für die obigen Quotienten die folgende einfache Darstellung:

$$(18.) \qquad \mathfrak{Z}_l(x_0, x_1, \dots x_s) = \frac{\mathfrak{E}_l}{\mathfrak{E}_{l-1}} = \prod_{(\mathfrak{P})} \mathfrak{P}^{\alpha_l - 1}.$$

Die hierdurch eingeführten ganzen Divisoren $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \dots \mathfrak{Z}_s$ wurden a. a. O. als *der erste, zweite, ... s^{te} Verzweigungsteiler der Schar* $(x_0, x_1, \dots x_s)$ bezeichnet. Die vorstehenden Betrachtungen zeigten, daß sie Transformations- und Differentiationsinvarianten und daß sie außerdem homogen von der nullten Dimension sind. Zu ihnen tritt noch der größte gemeinsame Teiler

$$(18^a.) \qquad \mathfrak{Z}_0 = (x_0, x_1, \dots x_s) = \prod_{(\mathfrak{P})} \mathfrak{P}^{a_0}$$

jener $s+1$ Elemente, welcher die beiden ersten Invarianteneigenschaften ebenfalls hat, aber homogen von der ersten Dimension ist. Die Gleichungen (18.) und (17^a.) lehren, daß sich die Differentialteiler $\mathfrak{E}_l$ und die Fundamentalteiler Δ_l aus den Verzweigungsteilern $\mathfrak{Z}_l$ und $\mathfrak{Z}_0$ durch die einfachen Gleichungen:

$$(19.) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{E}_l &= \mathfrak{Z}_0\, \mathfrak{Z}_1 \cdots \mathfrak{Z}_l \\ \Delta_l &= \mathfrak{Z}_0^{l+1}\, \mathfrak{Z}_1^{l} \cdots \mathfrak{Z}_l \end{aligned}$$

zusammensetzen.

Befreit man die $\binom{s+1}{l+1}$ Elemente $\dfrac{\Delta_l^{(i)} \cdot d\xi^{\frac{l(l+1)}{2}}}{\mathfrak{Z}_0^{l+1}}$ der Matrix $\dfrac{\left(\left(\dfrac{d^h x_i}{d\xi^h}\right)\right) d\xi^{\frac{l(l+1)}{2}}}{\mathfrak{Z}_0^{l+1}}$ von ihrem soeben bestimmten größten gemeinsamen Teiler $\Delta_l = \mathfrak{Z}_1^{l}\, \mathfrak{Z}_2^{l-1} \dots \mathfrak{Z}_l$, so erhält man $\binom{s+1}{l+1}$ ganze Divisoren $\mathfrak{T}_l^{(i)}$, welche wir a. a. O. S. 458. die Tangentialkoordinaten l^{ter} Ordnung der Divisorenschar $(x_0, x_1, \dots x_s)$ genannt haben, weil sie die naturgemäße Verallgemeinerung der Tangential- oder Linienkoordinaten einer ebenen Kurve für mehrdimensionale Räume sind. Aus den so sich ergebenden Gleichungen:

$$(20.) \qquad \Delta_l^{(i)}\, d\xi^{\frac{l(l+1)}{2}} = \mathfrak{Z}_0^{l+1}\, \mathfrak{Z}_1^{l} \dots \mathfrak{Z}_l\, \mathfrak{T}_l^{(i)}$$

ergibt sich zunächst, daß alle Tangentialkoordinaten derselben Ordnung einer und derselben Divisorenklasse angehören, weil ja jeder Quotient $\mathfrak{T}_l^{(i)}/\mathfrak{T}_l^{(k)} = \Delta_l^{(i)}/\Delta_l^{(k)}$ ein Divisor der Hauptklasse ist.

Bezeichnet man endlich die gemeinsame Ordnungszahl aller Divisoren $\mathfrak{T}_l^{(i)}$ durch n_l, wobei $n_0 = -n$ und n_s offenbar gleich Null ist, und sind w_l die Grade der Verzweigungsteiler $\mathfrak{Z}_l$, wobei w_0 den Grad von $\mathfrak{Z}_0$ bedeuten soll, so ergeben sich aus den Gleichungen (20.), da jede Determinante $\Delta_l^{(i)}$ den Grad Null und der Divisor von $d\xi$ den Grad $2(p-1)$ besitzt, die a. a. O. bereits abgeleiteten allgemeinsten *Plücker*schen Formeln:

$$(20.) \qquad l(l+1)(p-1) = n_l + (l+1)\, w_0 + l\, w_1 + \dots + w_l.$$

Die Resultate dieser allgemeinen Untersuchung ergeben nun unmittelbar die geschlossene Darstellung des zu einem beliebigen Differen-

tiale dx gehörigen Divisors $\mathfrak{Q}_{dx}$. Es sei nämlich $x = \frac{\mathfrak{z}_x}{\mathfrak{n}_x}$ die Divisorendarstellung der zu dx gehörigen Funktion x; betrachtet man dann die zu den beiden Elementen 1 und x gehörige Funktionenschar, so ist ihr größter gemeinsamer Teiler $\mathfrak{Z}_0 = (1, \frac{\mathfrak{z}_x}{\mathfrak{n}_x}) = \frac{1}{\mathfrak{n}_x}$ und ihr Verzweigungsteiler $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_x$. Für diese Schar existiert neben $\Delta_0 = 1$ nur die eine der soeben betrachteten Fundamentalinvarianten:

$$\Delta_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1, & x \\ 0, & \frac{dx}{d\xi} \end{vmatrix} d\xi}{(1, x)^2} = dx\, \mathfrak{n}_x^2 = \mathfrak{Z}_x ,$$

und aus ihr ergibt sich die gesuchte Darstellung des Divisors $\mathfrak{Q}_{dx}$

$$\mathfrak{Q}_{dx} = \frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^2}. \tag{21.}$$

Alle diese Divisoren $\mathfrak{Q}_{dx}, \mathfrak{Q}_{dx'}, \ldots$ gehören zu einer und derselben Divisorenklasse W, der sog. Differentialklasse, da der Quotient zweier Differentiale ja ein Element des Körpers ist. Sind also n_x und w_x die Grade von x, d. h. von $\mathfrak{n}_x$ und von $\mathfrak{Z}_x$, so haben alle diese Divisoren $\mathfrak{Q}_{dx}, \mathfrak{Q}_{dx'}, \ldots$ den gleichen Grad, d. h. $w_x - 2n_x$ ist eine für alle Elemente x unveränderliche ganze Zahl, welche, da w_x eine gerade Zahl ist, gleich $2(p-1)$ gesetzt werden kann. Hier ist p bekanntlich eine nicht negative ganze Zahl, welche das Geschlecht des Körpers $K(z, u)$ heißt.

Allgemeiner gehört zu jedem Divisor $\mathfrak{Q}$ der Differentialklasse W ein *Abel*sches Differential $d\omega$, welches für eine beliebige Differentiationsvariable dx in der Form $d\omega = y_x\, dx$ geschrieben werden kann, wo y_x ein Element des Körpers ist; in der Tat kann ja jeder solche Divisor $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_y \cdot \frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^2}$ gesetzt werden, wo $\mathfrak{Q}_y$ ein Divisor der Hauptklasse ist, also zu einem Elemente y des Körpers gehört. Umgekehrt gehört zu jedem Differential $d\omega = y_x\, dx$ ein bestimmter Divisor von W. Je nach der Wahl der Differentiationsvariablen kann das zu einem bestimmten Divisor $\mathfrak{Q}_{d\omega}$ gehörige Differential in jeder der Formen $y_x dx = y_{x'} dx' = \cdots$ dargestellt werden.

Um nun die Beziehung zwischen dem zu $d\omega$ gehörigen *Abel*schen Integrale $w = \int y_x dx$ und dem Divisor $\mathfrak{Q}_{d\omega}$ aufzusuchen, betrachte ich wieder

einen beliebigen Primteiler $\mathfrak{P}$, welcher in $\mathfrak{D}_{d\omega}$ etwa d Male enthalten sei. Ist dann π eine Primfunktion für die Stelle $\mathfrak{P}$ und ist für π als Differentiationsvariable $d\omega = y_\pi \cdot d\pi$, so folgt aus der Gleichung $\mathfrak{D}_{d\omega} = \mathfrak{D}_{y_\pi} \cdot \frac{\mathfrak{Z}_\pi}{\mathfrak{n}_\pi^2}$, weil $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{Z}_\pi$ und $\mathfrak{n}_\pi$ nicht enthalten ist, daß $\mathfrak{D}y_\pi$ auch genau durch $\mathfrak{P}^d$ teilbar, daß also, in der Umgebung von $\mathfrak{P}$, $y_\pi = c_d \pi^d + \cdots$ ist. Durch gliedweise Integration erhält man also das Resultat, daß, wenn ω_0 die Integrationskonstante bedeutet:

$$\omega - \omega_0 = \int (c_d \pi^d + \cdots)\, d\pi$$

genau mit π^{d+1} oder $\lg \pi$ beginnt, je nachdem $d \leqq -1$ oder $d = -1$ ist, d. h. es besteht der Satz (vgl. H. u. L. S. 296):

> Ist $\mathfrak{P}$ ein d-facher Teiler des zu dem Differentiale $d\omega$ gehörigen Divisors $\mathfrak{D}_{d\omega}$, so ist das Integral $\omega - \omega_0$ entweder durch $\mathfrak{P}^{d+1}$ oder durch $\lg \mathfrak{P}$ teilbar, je nachdem $d \geqq -1$ oder $d = -1$ ist.

Das quadratische Reziprozitätsgesetz im beliebigen quadratischen Zahlkörper.

Von Herrn *W. Welmin* in Warschau.

Der vorliegende Aufsatz ist eine kurze Wiedergabe meiner in russischer Sprache unter demselben Titel verfaßten Schrift, welche 1913 in einer Sonderausgabe und 1914 in den „Warschauer Universitätsnachrichten“ erschienen ist.

Durch Verallgemeinerung der Methode *Dirichlets**) ist es mir gelungen, die Richtigkeit des *Hilbert*schen Reziprozitätsgesetzes für einen beliebigen quadratischen Zahlkörper ganz elementar nachzuweisen. Soviel mir bekannt, hat nur *Dörrie***) in seiner Dissertation eine analoge Methode angewandt. Jedoch untersucht er einen ganz vereinzelten Fall des quadratischen Zahlkörpers mit einer einzigen Idealklasse. Daher dürfte vielleicht eine in deutscher Sprache gehaltene Veröffentlichung der von mir erzielten Resultate einiges Interesse wachrufen.

Erstes Kapitel. Allgemeine Reziprozitätsgesetze für quadratische Zahlkörper.

§ 1. Die Berechnung von *Legendre*s Symbolen des quadratischen Zahlkörpers kann leicht auf die Berechnung eben solcher Symbole des rationalen Körpers zurückgeführt werden. Wir wollen das ungerade Prim-

*) *Dirichlet*, Démonstration d'une propriété analogue à la loi de réciprocité, qui existe entre deux nombres premiers quelconques, Werke, Bd. I, pp. 173—188.

Dirichlet, Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes, Werke, Bd. I, pp. 533—618.

**) *Dörrie*, Das quadratische Reziprozitätsgesetz im quadratischen Zahlkörper mit der Klassenzahl 1, Inaugural-Dissertation, Göttingen 1898.

ideal des Zahlkörpers mit $\mathfrak{p}$ bezeichnen; wir werden nur zwei Fälle, jeden für sich, durchzugehen haben.

Erster Fall. Die Norm des Ideals $\mathfrak{p}$ ist eine rationale Primzahl. Die Diskriminante des quadratischen Zahlkörpers sei ∂. Wir können nun schreiben:

$$\mathfrak{p} = \left[p, \frac{-b + \sqrt{\partial}}{2}\right], \quad N(\mathfrak{p}) = p.$$

Hier ist p eine rationale Primzahl, und das Symbol N bezeichnet die Norm. Angenommen, $\alpha = \frac{m + n\sqrt{\partial}}{2}$ sei eine beliebige ganze Zahl des quadratischen Zahlkörpers, so erhalten wir leicht:

$$\sqrt{\partial} \equiv b \,(\text{mod. } 2\mathfrak{p}), \quad \alpha \equiv \frac{m + nb}{2} \,(\text{mod. } \mathfrak{p}).$$

Die ganze rationale Zahl $\frac{m + nb}{2}$ bezeichnen wir durch k. Die *Legendre*schen Symbole $\left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right\}$ und $\left\{\frac{k}{\mathfrak{p}}\right\}$ des quadratischen Zahlkörpers sind einander ersichtlich gleich. Auf Grund der Bestimmung des Symbols haben wir

$$\left\{\frac{k}{\mathfrak{p}}\right\} \equiv k^{\frac{N(\mathfrak{p})-1}{2}} \equiv k^{\frac{p-1}{2}} \,(\text{mod. } \mathfrak{p}).$$

Für das Symbol $\left\{\frac{k}{p}\right\}$ des rationalen Körpers haben wir die Kongruenz

$$\left(\frac{k}{p}\right) \equiv k^{\frac{p-1}{2}} \,(\text{mod. } p),$$

hieraus erhalten wir die Gleichungen:

$$(1.) \qquad \left\{\frac{k}{\mathfrak{p}}\right\} = \left(\frac{k}{p}\right), \quad \left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right\} = \left(\frac{k}{p}\right).$$

Zweiter Fall. Die Norm des Ideals $\mathfrak{p}$ ist das Quadrat einer rationalen Primzahl.

Wir haben $\mathfrak{p} = (p)$, wobei $\left(\frac{\partial}{p}\right) = -1$ und folglich $\partial^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \,(\text{mod. } p)$.

Wir nehmen $\alpha = \frac{m + n\sqrt{\partial}}{2}$ an und schreiben

$$2\alpha = m + n\sqrt{\partial},$$
$$(2\alpha)^p \equiv m^p + \partial^{\frac{p-1}{2}} n^p \sqrt{\partial} \,(\text{mod. } p),$$
$$m^p \equiv m \,(\text{mod. } p), \quad n^p \equiv n \,(\text{mod. } p),$$
$$(2\alpha)^p \equiv m - n\sqrt{\partial} \equiv 2\alpha' \,(\text{mod. } p),$$
$$2^p \equiv 2 \,(\text{mod. } p), \quad \alpha^p \equiv \alpha' \,(\text{mod. } p).$$

Hier ist α' eine mit α konjugierte Zahl. Die Norm der Zahl α bezeichnen wir durch A; wir erhalten leicht:

$$A = \alpha\,\alpha' \equiv \alpha^{p+1} \pmod{p},\quad \alpha^{\frac{N(p)-1}{2}} = \alpha^{\frac{p^2-1}{2}} = A^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

So kommen wir zu der Gleichung

$$(2.)\qquad \left\{\frac{\alpha}{p}\right\} = \left(\frac{A}{p}\right),\quad A = N(\alpha).$$

Die Gleichungen (1.) und (2.) erlauben, *Legendres* Symbole des quadratischen Zahlkörpers zu berechnen.

§ 2. Die Berechnung von *Jakobis* Symbol des quadratischen Zahlkörpers kann leicht auf die Berechnung der Symbole des rationalen Körpers zurückgeführt werden.

Zuerst wollen wir *Jakobis* Symbol $\left\{\frac{\alpha}{a}\right\}$ betrachten, wo a eine ganze rationale Zahl ist. Wir wollen die Richtigkeit folgender Formel beweisen:

$$(3).\qquad \left\{\frac{\alpha}{a}\right\} = \left(\frac{A}{a}\right),\quad A = N(\alpha),$$

wo $\left(\frac{A}{a}\right)$ *Jakobis* Symbol des rationalen Körpers ist. Ersichtlich genügt es, die Formel (3.) für den Fall zu beweisen, daß a eine rationale Primzahl ist.

Wenn die Zahl a eine Primzahl im quadratischen Zahlkörper bleibt, so geht die Richtigkeit der Formel (3.) direkt aus der Gleichung (2.) hervor.

Wenn die Zahl $a = p$ im quadratischen Zahlkörper zerlegbar ist, so können wir schreiben

$$p = \mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_1 = \left[p,\ \frac{-b+\sqrt{\partial}}{2}\right],\ \mathfrak{p}_2 = \left[p,\ \frac{b+\sqrt{\partial}}{2}\right],$$

$$b^2 \equiv \partial \pmod{4p}.$$

Es sei $\alpha = \frac{m+n\sqrt{\partial}}{2}$; nach Formel (1.) können wir schreiben:

$$\left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{p}_1}\right\} = \left(\frac{k_1}{p}\right),\quad \left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{p}_2}\right\} = \left(\frac{k_2}{p}\right),$$

$$k_1 = \frac{m+nb}{2},\quad k_2 = \frac{m-nb}{2}.$$

Laut der Bestimmung von *Jakobis* Symbol haben wir:

$$\left\{\frac{\alpha}{p}\right\} = \left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{p}_1}\right\}\left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{p}_2}\right\} = \left(\frac{k_1\,k_2}{p}\right).$$

Andererseits erhalten wir leicht:

$$k_1\,k_2 = \frac{m^2-n^2b^2}{4} \equiv \frac{m^2-n^2\partial}{4} \equiv N(\alpha) \pmod{p}.$$

So erweist sich die Formel (3.) als richtig.

Betrachten wir nun *Jakobi*s Symbol $\left\{\frac{\alpha}{\mu}\right\}$, wo μ eine ganze Zahl des Körpers ist, welche keine rationalen Teiler hat. Die Fundamentalbasis des Körpers sei aus den Zahlen $[1, \Theta]$ gebildet; wir nehmen an:

$$\alpha = a + b\,\Theta,\ \mu = m + n\,\Theta.$$

In Anbetracht der Gleichung $n\alpha - b\mu = an - bm$ können wir schreiben:

$$n\alpha \equiv an - bm \pmod{\mu},\ \left\{\frac{\alpha}{\mu}\right\} = \left\{\frac{n}{\mu}\right\}\left\{\frac{an-bm}{\mu}\right\}.$$

Nun wollen wir die Zahl μ in das Produkt der Primideale zerlegen: $\mu = \mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_s$. Die Norm des Ideals $\mathfrak{p}_i$ ist augenscheinlich eine rationale Primzahl p_i. Angenommen, es sei $N(\mu) = M$, so erhalten wir die Gleichung $M = p_1\,p_2 \ldots p_s$. Ferner haben wir:

$$\left\{\frac{n}{\mu}\right\} = \left\{\frac{n}{\mathfrak{p}_1}\right\}\left\{\frac{n}{\mathfrak{p}_2}\right\}\cdots\left\{\frac{n}{\mathfrak{p}_s}\right\} = \left(\frac{n}{p_1}\right)\left(\frac{n}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{n}{p_s}\right) = \left(\frac{n}{M}\right),$$

$$\left\{\frac{an-bm}{\mu}\right\} = \left(\frac{an-bm}{M}\right).$$

Endlich erhalten wir folgende Gleichung

$$\left\{\frac{a+b\Theta}{m+n\Theta}\right\} = \left(\frac{n}{M}\right)\left(\frac{an-bm}{M}\right). \tag{4.}$$

Hier ist $M = N(m + n\Theta)$; die Zahl $m + n\Theta$ hat keine rationalen Teiler.

§ 3. Wir wollen die ganzen Zahlen α und β des quadratischen Zahlkörpers betrachten, welche relativ prim zueinander und zu der Zahl 2 sind, welche keine rationalen Teiler haben und durch die Gleichungen bestimmt werden

$$\alpha = a_1 + a_2\,\Theta,\quad \beta = b_1 + b_2\,\Theta.$$

Die Normen der Zahlen α und β wollen wir durch A, B bezeichnen. Auf Grund der Formel (4.) können wir folgende Gleichungen niederschreiben:

$$\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\} = \left(\frac{b_2}{B}\right)\left(\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{B}\right),\ \left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\} = \left(\frac{a_2}{A}\right)\left(\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{A}\right).$$

Hieraus erhalten wir leicht eine neue Gleichung

$$\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\}\left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\} = \left(\frac{-1}{A}\right)\left(\frac{a_2}{A}\right)\left(\frac{b_2}{B}\right)\left(\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{AB}\right).$$

Wir wollen jetzt eine neue Zahl γ des quadratischen Zahlkörpers betrachten, indem wir sie durch folgende Gleichung definieren:

$$\gamma = \alpha'\,\beta = c_1 + c_2\,\Theta.$$

Hier bezeichnet α' eine mit α konjugierte Zahl. Mühelos erhalten wir die Beziehung

$$c_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Die Norm der Zahl γ wollen wir C nennen; ersichtlich ist $C = AB$. Die Zahl c_2 ist relativ prim zu A und B, hieraus folgt, daß γ keine rationalen Teiler haben kann. Wir erhalten die Formel:

$$\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\}\left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\} = \left(\frac{-1}{A}\right)\left(\frac{a_2}{A}\right)\left(\frac{b_2}{B}\right)\left(\frac{c_2}{C}\right).$$

Nun wollen wir das neue Symbol $[\mu]$ durch folgende Bedingung definieren: *Es sei $\mu = m + n\Theta$ eine ungerade Zahl des quadratischen Körpers ohne rationale Teiler und $M = N(\mu)$; wir setzen $\left(\frac{n}{M}\right) = [\mu]$.* Mit Hilfe dieses neuen Symbols erhalten wir die Korrelation:

$$\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\}\left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\} = \left(\frac{-1}{A}\right)[\alpha][\beta][\alpha'\beta], \tag{5}$$

welche den Ausgangspunkt bei der Konstruktion der Reziprozitätsgesetze bildet.

§ 4. Um zu der Berechnung der Symbole $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\alpha'\beta]$ schreiten zu können, müssen wir uns mit der Einteilung der ungeraden Zahlen des quadratischen Zahlkörpers in besondere Gruppen, die wir Kategorien nennen wollen, bekannt machen.

Es sei α eine gewisse Zahl des Körpers, die relativ prim zu 2 ist; die Gesamtheit der ganzen Zahlen des Körpers, die relativ prim zu 2 sind und die nach dem Modul 4 mit dem Produkt $\alpha\beta^2$, wo β eine beliebige ganze Zahl ist, kongruent sind, heißt eine Kategorie der Zahlen des quadratischen Körpers.

Um Raum zu ersparen, werden wir in der Folge nur die quadratischen Zahlkörper prüfen, die durch die Zahl $\Theta = \sqrt{4k+2}$ bestimmt werden; in meiner russischen Arbeit habe ich auch die übrigen Typen der quadratischen Zahlkörper in allen Einzelheiten geprüft.

Es ist leicht, sich davon zu überzeugen, daß der Körper $K(\Theta)$ vier Kategorien hat, von denen jede aus zwei Klassen nach dem Modul 4 besteht. Wir erhalten folgende Tabelle der Vertreter der Klassen aller Kategorien

(6.)

I Kategorie	$1\ ,\ 3+2\Theta$
II Kategorie	$1+2\Theta,\ 3$
III Kategorie	$1+\Theta,\ 3+\Theta$
IV Kategorie	$1+3\Theta,\ 3+3\Theta$

Zum Bestand der ersten Kategorie gehören die Zahlen, welche nach dem Modul 4 einem vollen Quadrat kongruent sind; solche Zahlen heißen, wie bekannt, Primärzahlen.

Die Gesamtheit der Zahlen, welche mit den Zahlen der gegebenen Kategorie konjugiert sind, bildet augenscheinlich eine neue Kategorie, welche man als mit der ursprünglichen konjugiert bezeichnen kann. Mühelos erhalten wir so eine Tabelle der konjugierten Kategorien

I	II	III	IV
I	II	IV	III

.

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Kategorie des Produkts $\alpha\beta$ durch die Kategorien der Multiplikatoren α und β vollständig definiert wird. Man kann folgendes Theorem aussprechen:

Das Produkt zweier Zahlen ein und derselben Kategorie ist eine primäre Zahl. Das Produkt der Zahl α mit einer primären Zahl gehört zu derselben Kategorie wie die Zahl α. Das Produkt zweier nicht primärer Zahlen α und β verschiedener Kategorien gehört einer nicht primären Kategorie an, die verschieden von denen der Multiplikatoren ist.

Wir wollen jetzt die Zahl $\mu = m + n\Theta$ des quadratischen Zahlkörpers, welche eine positive Norm und keine rationalen Teiler hat, betrachten. Wir nehmen an:

$$(7.) \qquad N(\mu) = M = m^2 - (4k+2)\,n^2.$$

Wir wollen das Vorhandensein der folgenden Eigenschaften der Zahl μ im Abhängigkeitsverhältnis zu der Kategorie, zu welcher diese Zahl gehört, beweisen:

(8.)

I Kategorie	$M \equiv 1 \pmod 8$	$[\mu] = +1$
II Kategorie	$M \equiv 1 \pmod 8$	$[\mu] = +1$
III Kategorie	$M \equiv 3 \pmod 4$	$[\mu] = +1$
IV Kategorie	$M \equiv 3 \pmod 4$	$[\mu] = -1$

.

Die Kongruenzen der zweiten Kolumne der abgebildeten Tabelle sind aus der Formel (7.) und der Tabelle (6.) leicht erhältlich. Die Gleichungen der letzten Kolumne können wir auf folgende Weise erhalten:

1) Die Zahl μ gehört der Kategorie I oder II an. Wir nehmen an: $n = 2^\sigma n_0$, wo n_0 eine ungerade Zahl ist. Die Kongruenz $M \equiv m^2 \pmod n$ ergibt $\left(\frac{M}{n_0}\right) = +1$. Mit Hilfe des Reziprozitätsgesetzes des rationalen Körpers erhalten wir $\left(\frac{n_0}{M}\right) = +1$, da $M > 0$. Weiter haben wir $M \equiv 1 \pmod 8$,

daraus erhalten wir $\left(\frac{2}{M}\right) = 1$, $\left(\frac{n}{M}\right) = +1$, d. h. $[\mu] = +1$.

2) Die Zahl μ gehört der Kategorie III an. Wir haben $M \equiv 3 \pmod 4$, $n \equiv 1 \pmod 4$. Die Gleichung $\left(\frac{M}{n}\right) = +1$ gibt $\left(\frac{n}{M}\right) = [\mu] = +1$.

3) Die Zahl μ gehört der Kategorie IV an. Wir haben $M \equiv 3 \pmod 4$, $n \equiv 3 \pmod 4$. Die Gleichung $\left(\frac{M}{n}\right) = +1$ gibt $\left(\frac{n}{M}\right) = [\mu] = -1$.

Jetzt haben wir die Möglichkeit, das Produkt $\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\}\left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\}$ im Abhängigkeitsverhältnis zu den Kategorien der Zahlen α und β zu berechnen, gesetzt, daß die Normen dieser Zahlen positiv sind. Die Norm der Zahl $\alpha'\beta$ ist augenscheinlich auch positiv.

Fall I. Die Zahl α ist eine primäre Zahl. Tafel (8.) ergibt $\left(\frac{-1}{A}\right) = +1$, $[\alpha] = +1$. Die Zahlen β und $\alpha'\beta$ gehören ein und derselben Kategorie an, daher $[\beta] = [\alpha'\beta]$. Nach Formel (5.) erhalten wir $\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\}\left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\} = +1$.

Fall II. Die Zahlen α und β gehören beide der Kategorie II an. Wir haben $\left(\frac{-1}{A}\right) = +1$, $[\alpha] = [\beta] = +1$. Die Zahl $\alpha'\beta$ ist eine primäre Zahl, daher $[\alpha'\beta] = +1$. Formel (5.) ergibt $\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\}\left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\} = +1$.

Fall III. Die Zahl α gehört der Kategorie II an, die Zahl β der Kategorie III oder IV. Wir haben: $\left(\frac{-1}{A}\right) = +1$, $[\alpha] = +1$. Von den Zahlen β, $\alpha'\beta$ gehört eine der Kategorie III, die andere der Kategorie IV an, daher $[\beta][\alpha'\beta] = -1$. Formel (5.) ergibt $\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\}\left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\} = -1$.

Fall IV. Die Zahlen α und β gehören beide ein und derselben Kategorie III oder IV an. Die Zahl $\alpha'\beta$ gehört der Kategorie II an. Wir haben $\left(\frac{-1}{A}\right) = -1$, $[\alpha] = [\beta]$, $[\alpha'\beta] = +1$. Formel (5.) ergibt $\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\}\left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\} = -1$.

Fall V. Die Zahl α gehört der Kategorie III, die Zahl β der Kategorie IV an. Die Zahl $\alpha'\beta$ ist augenscheinlich eine primäre Zahl. Wir haben $\left(\frac{-1}{A}\right) = -1$, $[\alpha] = +1$, $[\beta] = -1$, $[\alpha'\beta] = +1$. Formel (5.) ergibt dann $\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\}\left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\} = +1$.

Die erhaltenen Resultate kann man in Gestalt der unten abgebildeten Tafel darstellen, in welcher die Werte des Produkts $\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\}\left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\}$ im Abhängigkeitsverhältnis zu den Kategorien der Zahlen α und β gegeben sind:

(9.)

Kategorien	I	II	III	IV
I	+1	+1	+1	+1
II	+1	+1	−1	−1
III	+1	−1	−1	+1
IV	+1	−1	+1	−1

Die Tafel (9.) wollen wir die Tabelle der Reziprozitätsgesetze des quadratischen Zahlkörpers $K(\sqrt{4k+2})$ nennen. Diese Tabelle gibt die Werte des Produkts $\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\}\left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\}$ in der Voraussetzung, daß α und β Zahlen sind, die positive Normen, aber keine rationalen Teiler haben.

§ 5. Im vorliegenden Paragraphen wollen wir den Fall betrachten, in welchem zum mindesten eine der Zahlen α und β negative Norm hat; beide Zahlen α und β wollen wir wie bisher als der rationalen Teiler ermangelnd voraussetzen.

Fall I. Die Zahl α hat eine positive Norm, die Zahl β eine negative; die Norm der Zahl $\alpha'\beta$ ist augenscheinlich negativ.

Da $A>0$, so werden die Symbole $\left(\frac{-1}{A}\right)$ und $[\alpha]$ nach den Regeln des vorhergehenden Paragraphen berechnet. Wenn $b_2>0$, $c_2>0$, so werden die Symbole $[\beta]$ und $[\alpha'\beta]$ auch nach den Regeln des vorhergehenden Paragraphen berechnet. Wenn $b_2<0$, $c_2<0$, so unterscheiden sich die Symbole $[\beta]$ und $[\alpha'\beta]$ durch Vorzeichen*) von der entsprechenden

---

*) Wir ziehen hier die bekannten Formeln in Betracht:

$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$, wenn sich unter den Zahlen p, q mindestens eine positive befindet,

$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=-(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$, wenn beide Zahlen p, q negativ sind,

$\left(\frac{-1}{p}\right)=-(-1)^{\frac{p-1}{2}}$, wenn die Zahl p negativ ist.

Größe der Tafel (8.); das Produkt $[\beta][\alpha'\beta]$ hat den früheren Wert. Wenn endlich $b_2 c_2 < 0$, so ist eines der Symbole $[\beta]$, $[\alpha'\beta]$ in Tafel (8.) gegeben, das andere hat das entgegengesetzte Vorzeichen, wie in der Tafel (8.); das Produkt $[\beta][\alpha'\beta]$ unterscheidet sich durch das Vorzeichen von seinem früheren Werte.

Wir erhalten das folgende Theorem: *Es sei* $\alpha = a_1 + a_2\theta$, $\beta = b_1 + b_2\theta$, $\alpha'\beta = c_1 + c_2\theta$, $N(\alpha) > 0$, $N(\beta) < 0$. *Wenn* $b_2 c_2 > 0$, *so ist das Produkt* $\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\}\left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\}$ *in Tafel* (9.) *gegeben. Wenn* $b_2 c_2 < 0$, *so unterscheidet sich das Produkt* $\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\}\left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\}$ *durch das Vorzeichen von der entsprechenden Zahl der Tafel* (9.).

Späterhin werden wir die Form der in diesem Theorem enthaltenen Kennzeichen bedeutend vereinfachen.

Fall II. Beide Zahlen α und β haben negative Normen; in diesem Fall ist die Norm der Zahl $\alpha'\beta$ augenscheinlich positiv. Mühelos ziehen wir folgende Schlüsse:

1.) Das Symbol $\left(\frac{-1}{A}\right)$ wird mit Anwendung der Formel $\left(\frac{-1}{A}\right) = -(1)^{\frac{A-1}{2}}$ berechnet. 2.) Wenn $a_2 b_2 > 0$, so kann das Produkt $[\alpha][\beta]$ mit Hilfe der Tabelle (8.) berechnet werden. 3.) Wenn $a_2 b_2 < 0$, so unterscheidet sich das Produkt $[\alpha][\beta]$ durch das Zeichen von der Zahl, welche wir mit Hilfe der Tabelle (8.) erhalten. 4.) Das Symbol $[\alpha'\beta]$ ist immer auf Tafel (8.) gegeben. Wir erhalten augenscheinlich die Möglichkeit, folgendes Theorem zu formulieren: *Es sei* $\alpha = a_1 + a_2\theta$, $\beta = b_1 + b_2\theta$, $N(\alpha) < 0$, $N(\beta) < 0$. *Wenn* $a_2 b_2 < 0$, *so gibt Tafel* (9.) *das Produkt* $\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\}\left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\}$. *Wenn* $a_2 b_2 > 0$, *so unterscheidet sich das Produkt* $\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\}\left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\}$ *von der entsprechenden Zahl der Tabelle* (9.) *durch das Vorzeichen.*

§ 6. Jetzt wollen wir versuchen, uns von der Einschränkung zu befreien, welche in der Voraussetzung liegt, daß die Zahlen α und β keine rationalen Teiler haben.

Wir wollen zuerst die rationale ungerade Zahl a und die Zahl β, die relativ prim zu ihr ist und keine rationalen Teiler hat, betrachten; die Norm der Zahl β bezeichnen wir durch B. Die Formeln (3.) und (4.) geben die Gleichung

$$\left\{\frac{a}{\beta}\right\}\left\{\frac{\beta}{a}\right\}=\left(\frac{a}{B}\right)\left(\frac{B}{a}\right),$$

mit deren Hilfe es nicht schwer ist, sich von der Anwendbarkeit beider Theoreme des vorigen Paragraphen auf den vorliegenden Fall zu überzeugen. Wir erhalten auch folgendes Theorem, dessen wir uns unten bedienen wollen: *Wenn die rationale ungerade Zahl a positiv ist, so ist das Produkt* $\left\{\frac{a}{\beta}\right\}\left\{\frac{\beta}{a}\right\}$ *immer in Tafel* (9.) *gegeben.*

Wir wollen jetzt die rationalen Zahlen a und b betrachten. Da die Normen dieser Zahlen a^2 und b^2 sind, so erhalten wir nach Formel (3.) die Gleichung $\left\{\frac{a}{b}\right\}\left\{\frac{b}{a}\right\}=+1$. Die Theoreme des vorherigen Paragraphen sind auch hier anwendbar, wie man bei Prüfung der Tafel (9.) auf den ersten Blick sieht.

Wir wollen uns endlich die ganzen Zahlen α und β ansehen, die relativ prim zueinander und zu der Zahl 2, jedoch in jeder anderen Hinsicht ganz beliebige Zahlen sind. Die größten rationalen Teiler dieser Zahlen wollen wir dementsprechend mit a und b bezeichnen; ersichtlich können die Zahlen a und b immer als positiv gelten. Wir setzen $\alpha=a\mu$, $\beta=b\nu$. Die Eigenschaften von *Jakobi*s Symbolen erlauben uns, folgende Gleichung zu schreiben:

$$\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\}\left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\}=\left\{\frac{a}{b}\right\}\left\{\frac{b}{a}\right\}\cdot\left\{\frac{a}{\nu}\right\}\left\{\frac{\nu}{a}\right\}\cdot\left\{\frac{\mu}{b}\right\}\left\{\frac{b}{\mu}\right\}\cdot\left\{\frac{\mu}{\nu}\right\}\left\{\frac{\nu}{\mu}\right\}.$$

Auf Grund des Vorigen sind die Produkte $\left\{\frac{a}{b}\right\}\left\{\frac{b}{a}\right\}$, $\left\{\frac{a}{\nu}\right\}\left\{\frac{\nu}{a}\right\}$, $\left\{\frac{\mu}{b}\right\}\left\{\frac{b}{\mu}\right\}$ immer in Tafel (9.) gegeben. Hieraus geht hervor, daß die Produkte $\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\}\left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\}$ und $\left\{\frac{\mu}{\nu}\right\}\left\{\frac{\nu}{\mu}\right\}$ entweder gleichzeitig in Tafel (9.) gegeben sind, oder sich beide durch die Vorzeichen von den entsprechenden Zahlen dieser Tabelle unterscheiden. Die Ungleichungen $a>0$, $b>0$ gestatten uns leicht einen Schluß auf die Anwendbarkeit der beiden Theoreme § 5, welche sich so als allgemein gültig erweisen.

§ 7. Die Theoreme § 5 können anders gefaßt werden, so daß ihr Inhalt bestimmter wird.

Da die Zahlen der imaginären quadratischen Zahlkörper immer po-

sitive Normen haben, so können wir von ihnen absehen und ziehen nur den Fall reeller Zahlkörper in Betracht. Die Fundamentalbasis des Körpers sei aus den Zahlen $[1, \Theta]$ gebildet, wo $\Theta = \sqrt{m}$ oder $\frac{1+\sqrt{m}}{2}$; dann erhalten wir die Ungleichungen $\Theta > 0$, $\Theta' < 0$. Es ist leicht, sich von der Richtigkeit folgender Hilfstheoreme zu überzeugen:

1) *Es sei $\alpha = a + b\Theta$ eine Zahl des quadratischen Zahlkörpers mit einer positiven Norm. Das Vorzeichen dieser Zahl stimmt mit dem der rationalen Zahl a überein.*

2) *Es sei $\alpha = a + b\Theta$ eine Zahl des quadratischen Zahlkörpers mit einer negativen Norm. Das Vorzeichen dieser Zahl stimmt mit dem der rationalen Zahl b überein.*

Auf Grund dieser Theoreme können wir leicht die Theoreme § 5 in folgender Gestalt darstellen:

1) *Es seien α und β ungerade Zahlen des quadratischen Zahlkörpers, die relativ prim zueinander sind, wobei $N(\alpha) > 0$, $N(\beta) < 0$.*

Tafel (9.) *liefert uns das Produkt $\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\}\left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\}$ nur in dem Falle, wo $\alpha > 0$.*

2) *Es seien α und β ungerade Zahlen mit negativen Normen, die relativ prim zueinander sind. Tafel* (9.) *liefert uns das Produkt $\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\}\left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\}$ nur in dem Falle, wo $\alpha\beta < 0$.*

Erinnern wir uns jetzt an die Definition der *Hilbert*schen Symbole*) $\left\{\frac{\alpha,\beta}{1}\right\}$ und $\left\{\frac{\alpha,\beta}{1'}\right\}$:

Das Symbol $\left\{\frac{\alpha,\beta}{1}\right\}$ bezeichnet die Zahl $+1$, wenn zum mindesten eine der Zahlen α und β positiv ist; im entgegengesetzten Falle bezeichnet das Symbol die Zahl -1. Das Symbol $\left\{\frac{\alpha,\beta}{1'}\right\}$ wird durch die Gleichung $\left\{\frac{\alpha,\beta}{1'}\right\} = \left\{\frac{\alpha',\beta'}{1}\right\}$ bestimmt.

Es ist nun nicht schwer, sich von der Richtigkeit des folgenden Endtheorems zu überzeugen:

---

*) *Hilbert*, Über die Theorie der relativ-*Abel*schen Zahlkörper, p. 376.

Tafel (9.) *gibt in allen Fällen die Werte des Produkts* $\left\{\frac{\alpha, \beta}{1}\right\}\left\{\frac{\alpha, \beta}{1'}\right\}\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\}\left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\}$.

In diesem Theorem sind die allgemeinen Reziprozitätsgesetze der ungeraden Zahlen des quadratischen Zahlkörpers enthalten.

Zweites Kapitel. Von den quadratischen Normenresten in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper.

§ 1. Für das weitere Studium der Reziprozitätsgesetze der quadratischen Zahlkörper werden wir die Eigenschaften der *Hilbert*schen Normenreste ausnutzen müssen. Ich werde den Inhalt der §§ 7, 8 und 9 des *Hilbert*schen Artikels „Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers", welcher in den Mathematischen Annalen, Bd. 51, abgedruckt worden ist, als bekannt voraussetzen. Alle Erwägungen der angeführten Paragraphen beziehen sich auf jeden beliebigen algebraischen Zahlkörper. Das Theorem 12 in § 8 bleibt richtig auch in Anwendung auf die Normenreste nach den Primidealteilern der Zahl 2; der *Hilbert*sche Beweis kann ohne jegliche Veränderung auch auf diesen Fall übertragen werden. In den folgenden Paragraphen werden wir einige für einen beliebigen algebraischen Zahlkörper gültige Theoreme beweisen, welche sich nicht bei *Hilbert* finden oder von ihm unter einschränkenden Voraussetzungen in bezug auf den Zahlkörper bewiesen sind.

§ 2. *Wenn die Zahl* μ *quadratischer Rest nach dem Ideal* $\mathfrak{w}$ *ist, so ist eine beliebige Zahl* ν *der Normenrest des Zahlkörpers* $K(\sqrt{\mu})$ *nach dem Ideal* $\mathfrak{w}$.

Es seien die Zahlen μ und 2 genau durch $\mathfrak{w}^a$ und $\mathfrak{w}^l$ teilbar; wir können dann folgende Kongruenz schreiben:

$$\mu \equiv \gamma^2 \pmod{\mathfrak{w}^{e+a+2l}}.$$

Hier ist e eine beliebige positive Zahl; γ ist irgendeine ganze Zahl des Körpers, welche genau durch $\mathfrak{w}^{\frac{a}{2}}$ teilbar ist. Die Zahl a ist ersichtlich eine gerade Zahl.

Jetzt wollen wir folgende Zahl A_1 des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ bilden:

$$\mathsf{A}_1 = (\nu + 1)\gamma + (\nu - 1)\sqrt{\mu}.$$

Hieraus erhalten wir mühelos:

$$N_k(\mathsf{A}_1) = (\nu+1)^2\gamma^2 - (\nu-1)^2\mu \equiv (\nu+1)^2\gamma^2 - (\nu-1)^2\gamma^2 \pmod{\mathfrak{w}^{e+a+2l}},$$

$$(10.) \qquad N_k(\mathsf{A}_1) \equiv 4\gamma^2 \nu \pmod{\mathfrak{w}^{e+a+2l}}.$$

Hier bezeichnet das Symbol $N_k(\mathsf{A}_1)$ die Relativnorm der Zahl A_1. Die Zahl 2γ ist genau durch $\mathfrak{w}^{\frac{a}{2}+l}$ teilbar; es sei δ eine zu $\mathfrak{w}$ relativ prime ganze Zahl, welche durch das Ideal $\frac{2\gamma}{\mathfrak{w}^{\frac{a}{2}+l}}$ teilbar ist. Wir wollen die Zahl A folgendermaßen definieren:

$$\mathsf{A} = \frac{\mathsf{A}_1 \cdot \delta}{2\gamma}.$$

Die Zahl A ist eine ganze Zahl, da wir folgende Relationen haben:

$$\mathsf{A} + \mathsf{A}' = (\nu + 1)\,\delta, \quad \mathsf{A}\mathsf{A}' = \frac{\delta^2 N_k(\mathsf{A}_1)}{4\gamma^2};$$

hier ist mit A' eine mit A relativ-konjugierte Zahl bezeichnet.

Die Kongruenz (10.) kann in folgender Gestalt geschrieben werden:

$$\delta^2 \nu \equiv N_k(\mathsf{A}) \pmod{\mathfrak{w}^e}.$$

Wenn wir die Zahl δ_1 durch die Kongruenz $\delta\delta_1 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{w}^e}$ definieren, so erhalten wir:

$$\nu \equiv N_k(\mathsf{A}\delta_1) \pmod{\mathfrak{w}^e}.$$

Da der Exponent e ganz beliebig ist, so erscheint die Zahl ν als Normenrest des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach dem Ideal $\mathfrak{w}$, was zu beweisen war.

§ 3. *Es sei die Zahl μ genau durch $\mathfrak{w}^a$ und die Zahl 2 genau durch $\mathfrak{w}^l$ teilbar. Wenn eine Kongruenz $\mu \equiv \mu_1 \pmod{\mathfrak{w}^{2l+a+1}}$ stattfindet, so gilt folgende Gleichung:*

$$\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = \left\{\frac{\nu, \mu_1}{\mathfrak{w}}\right\}.$$

Bei der Beweisführung werden wir drei Fälle zu betrachten haben.

Erster Fall. Beide Zahlen μ und μ_1 sind volle Quadrate. Auf Grund der Bestimmung des Normenrestsymbols haben wir die Gleichungen:

$$\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = +1, \quad \left\{\frac{\nu, \mu_1}{\mathfrak{w}}\right\} = +1.$$

Zweiter Fall. Eine der Zahlen, z. B. μ_1, ist ein volles Quadrat; dann ist die Zahl μ quadratischer Rest nach dem Ideal $\mathfrak{w}$. Die Bestimmung des Normenrestsymbols und das Theorem § 2 geben uns die Gleichungen:

$$\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = +1, \quad \left\{\frac{\nu, \mu_1}{\mathfrak{w}}\right\} = +1.$$

Dritter Fall. Keine der Zahlen μ und μ_1 ist ein volles Quadrat.

In diesem Falle wird das Theorem durch *Hilbert*s Erwägungen bewiesen*), welche einen elementaren Charakter tragen und auf einen beliebigen algebraischen Zahlkörper sich beziehen können.

Eine unmittelbare Verallgemeinerung des bewiesenen Theorems bildet der weitere Satz: *Es sei die Zahl μ genau durch $\mathfrak{w}^a$ und die Zahl ν genau durch $\mathfrak{w}^b$ teilbar. Wenn die Kongruenzen* $\mu_1 \equiv \alpha^2 \mu \pmod{\mathfrak{w}^{2l+a+1}}$ *und* $\nu_1 \equiv \beta^2 \nu \pmod{\mathfrak{w}^{2l+b+1}}$ *stattfinden, wobei α und β relativ prim zu $\mathfrak{w}$ sind, so gilt folgende Gleichung:*

$$\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = \left\{\frac{\nu_1, \mu_1}{\mathfrak{w}}\right\}.$$

§ 4. *Sind μ, ν beliebige ganze Zahlen des Körpers und $\mathfrak{w}$ irgendein Primidealteiler der Zahl 2, so ist stets*

$$\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = \left\{\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{w}}\right\}.$$

Ersichtlich genügt es zu beweisen, daß aus der Gleichung $\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = +1$ die Gleichung $\left\{\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{w}}\right\} = +1$ hervorgeht. Es seien die Zahlen μ durch $\mathfrak{w}^a$ und ν durch $\mathfrak{w}^b$ genau teilbar. Laut unserer Voraussetzung können wir folgende Kongruenz schreiben:

$$\nu \equiv N_k\left(\frac{\alpha + \beta\sqrt{\mu}}{\gamma}\right) \pmod{\mathfrak{w}^e},$$

oder

$$\nu\gamma^2 \equiv \alpha^2 - \beta^2\mu \pmod{\mathfrak{w}^{e+2c}}. \tag{11.}$$

Mit c haben wir den höchsten Exponenten bezeichnet, mit welchem das Ideal $\mathfrak{w}$ in der Zahl γ aufgeht. Da der Exponent e beliebig groß sein kann, so können wir immer die Ungleichung

$$e \geqq 4l + b + 2 \tag{12.}$$

voraussetzen. Die Kongruenz (11.) kann in folgender Gestalt geschrieben werden:

$$\beta^2\mu \equiv \alpha^2 - \gamma^2\nu \equiv N_k(a + \gamma\sqrt{\nu}) \pmod{\mathfrak{w}^{e+2c}}. \tag{13.}$$

Es sei die Zahl β genau durch $\mathfrak{w}^d$ teilbar. Besteht die Ungleichung $e + 2c \geqq 2l + 2d + a + 1$, so erlaubt uns die Kongruenz (13.) folgende Gleichung zu schreiben: $\left\{\frac{\beta^2\mu, \nu}{\mathfrak{w}}\right\} = +1$; hieraus erhalten wir $\left\{\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{w}}\right\} = +1$.

---

*) *Hilbert*, Relativquadratischer Zahlkörper, p. 96.

Jetzt wollen wir die entgegengesetzte Ungleichung voraussetzen:

$$e + 2c < 2l + 2d + a + 1.$$

Wir haben $2d + a > e + 2c - 2l - 1$. Die Kongruenz (11.) erlaubt uns zu schreiben

$$\gamma^2 \nu \equiv \alpha^2 \pmod{\mathfrak{w}^{e+2c-2l-1}},$$

daher erhalten wir mühelos

$$\nu \equiv \alpha_1^2 \pmod{\mathfrak{w}^{e-2l-1}}, \tag{14.}$$

wo α_1 irgendeine ganze Zahl des Körpers ist. Die Ungleichung (12.) gibt uns $e - 2l - 1 \geqq 2l + b + 1$. Die Kongruenz (14.) zeigt, daß die Zahl ν quadratischer Rest nach dem Ideal $\mathfrak{w}$ ist. Das Theorem § 2 gibt uns die Gleichung $\left\{\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{w}}\right\} = +1$.

Es ist also das Theorem dieses Paragraphen in allen Fällen ohne Ausnahme bewiesen.

§ 5. *Es seien α und β ganze Zahlen des algebraischen Zahlkörpers k, welche durch die Quadrate der Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ teilbar sind, d. h.*

$$\alpha = \mathfrak{a}^2 \mathfrak{a}_2, \quad \beta = \mathfrak{b}^2 \mathfrak{b}_2.$$

Es gibt immer ganze Zahlen des Körpers α_1 und β_1, welche die folgenden Eigenschaften besitzen:

1) *Die Zahlen $\frac{\alpha_1}{\alpha}$ und $\frac{\beta_1}{\beta}$ sind volle Quadrate im Körper k.*

2) *Es bestehen die Gleichungen*

$$\alpha_1 = \mathfrak{a}_1^2 \mathfrak{a}_2, \quad \beta_1 = \mathfrak{b}_1^2 \mathfrak{b}_2,$$

wobei die Ideale $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1$ relativ prim zu beliebigen im voraus gegebenen Zahlen oder Idealen sind.

Zum Beweise dieses Theorems wollen wir irgendwelche Ideale $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1$ betrachten, die mit Idealen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ äquivalent sind; wir können schreiben:

$$\mathfrak{a}_1 = \lambda \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{b}_1 = \mu \mathfrak{b},$$

wo λ und μ irgendwelche Bruchzahlen des Körpers k sind. Setzen wir nun $\lambda^2 \alpha = \alpha_1$, $\mu^2 \beta = \beta_1$, so erhalten wir die Gleichungen $\alpha_1 = \mathfrak{a}_1^2 \mathfrak{a}_2$, $\beta_1 = \mathfrak{b}_1^2 \mathfrak{b}_2$, welche beweisen, daß α_1 und β_1 ganze Zahlen des Körpers k sind.

Die Zahlen $\frac{\alpha_1}{\alpha} = \lambda^2$ und $\frac{\beta_1}{\beta} = \mu^2$ sind wirklich volle Quadrate im Körper k.

Zum Beweise der Möglichkeit einer solchen Wahl der Ideale $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1$, bei welcher sie relativ prim zu beliebig im voraus gegebenen Zah-

len oder Idealen sind, genügt es zu erinnern, daß jede Idealklasse des algebraischen Körpers Ideale enthält, welche relativ prim zu beliebigen im voraus gegebenen Idealen sind.

Bei der oben angegebenen Wahl der Zahlen α_1 und β_1 besteht ersichtlich immer folgende Gleichung:

$$\left\{\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\frac{\alpha_1, \beta_1}{\mathfrak{p}}\right\},$$

in welcher $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal des Körpers ist.

Drittes Kapitel. Die Ergänzungssätze zu dem allgemeinen Reziprozitätsgesetz.

§ 1. Wenn α und β zueinander relativ prime ungerade ganze Zahlen des quadratischen Körpers sind, so besteht, wie man leicht zeigt, die Gleichung

$$\Pi' \left\{\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\} \left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\},$$

wo das Produkt Π' sich über sämtliche ungeraden Primideale $\mathfrak{p}$ des Körpers erstreckt. Auf solche Weise sind die allgemeinen Reziprozitätsgesetze des quadratischen Zahlkörpers, welche im ersten Kapitel erörtert worden sind, nichts anderes als Regeln zur Berechnung des Produkts $\Pi' \left\{\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right\}$, wo α und β die zueinander relativ primen ungeraden Zahlen sind.

Wenn eine oder zwei der zu einander relativ primen Zahlen α, β mit der Zahl 2 gemeinsame Idealteiler haben, so werden wir die Regeln zur Berechnung des Produkts $\Pi' \left\{\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right\}$ Ergänzungssätze zu den allgemeinen Reziprozitätsgesetzen nennen.

Die Zahlen α und β lassen sich immer in die Gestalt von Produkten:

$$\alpha = \mathfrak{a}\mathfrak{w}_\alpha, \quad \beta = \mathfrak{b}\mathfrak{w}_\beta$$

bringen, wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ungerade, und $\mathfrak{w}_\alpha$ und $\mathfrak{w}_\beta$ solche Ideale sind, in denen nur die Teiler der Zahl 2 als Primteiler aufgehen. Es ist nicht schwer, sich von der Richtigkeit folgender Formel zu überzeugen:

$$\Pi' \left\{\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right\} \left\{\frac{\beta}{\mathfrak{a}}\right\}. \tag{15.}$$

Der Satz § 5 des zweiten Kapitels erlaubt uns, uns auf die Voraussetzung zu beschränken, daß in den Zahlen α und β die Primteiler der Zahl 2 nicht höher als in den ersten Potenzen aufgehen.

In der Tat, es sei $\mathfrak{w}$ ein in der Zahl 2 aufgehendes Primideal. Jede gerade Potenz eines solchen Ideals, die in den Zahlen α oder β

aufgeht, läßt sich durch eine gerade Potenz eines andern Ideals ersetzen, das relativ prim zur Zahl 2 ist. Eine solche Umgestaltung verändert die Werte der Normenrestsymbole nicht, woraus sich die Richtigkeit der von uns gemachten Bemerkung ergibt.

Ebenso wie im ersten Kapitel werde ich mich auf die Untersuchung des quadratischen Zahlkörpers, der durch die Zahl $\Theta = \sqrt{4k+2}$ bestimmt wird, beschränken; in meiner in russischer Sprache veröffentlichten Arbeit sind auch alle übrigen Typen des quadratischen Zahlkörpers untersucht.

§ 2. Im quadratischen Körper $K(\Theta)$ stellt die Zahl 2 das Quadrat des Primideals $\mathfrak{w}$ dar, das durch die Gleichung

$$\mathfrak{w} = [2, \Theta]$$

bestimmt wird. Auf Grund des § 1 genügt es, das Produkt $\Pi'\left\{\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right\}$ für den Fall zu berechnen, daß die Zahl α eine ungerade ist und die Zahl β nur durch die erste Potenz des Ideals $\mathfrak{w}$ teilbar ist. Wir fügen bloß die an und für sich unwesentliche Einschränkung hinzu, daß die Zahlen α und β keine rationalen Teiler haben; diese Einschränkung läßt sich auf dieselbe Weise beseitigen, wie wir es schon im ersten Kapitel zu analogem Zweck getan haben. Wir setzen

$$(16.)\quad \alpha = a_1 + a_2\,\Theta, \qquad \beta = b_1 + b_2\,\Theta = \mathfrak{b}\,\mathfrak{w}, \qquad \alpha'\beta = \gamma = c_1 + c_2\,\Theta;$$
$$N(\alpha) = A, \qquad N(\beta) = 2B, \qquad N(\gamma) = 2C.$$

Die Formel (15.) gibt uns die Gleichung

$$\Pi'\left\{\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\}\left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right\}.$$

Zur Berechnung des Symbols $\left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\}$ läßt sich die Formel (4.) aus dem ersten Kapitel verwenden; wir erhalten:

$$(17.)\qquad \left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\} = \left(\frac{a_2}{A}\right)\left(\frac{-c_2}{A}\right).$$

Aus den Gleichungen (16.) ergibt sich die Relation $b_2\,\alpha - a_2\,\beta = c_2$, woraus dann folgt:

$$b_2\,\alpha \equiv c_2 \pmod{\mathfrak{b}}.$$

Daher gilt die Gleichung

$$(18.)\qquad \left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right\} = \left(\frac{b_2}{B}\right)\left(\frac{c_2}{B}\right).$$

Durch Multiplikation der Gleichungen (17.) und (18.) erhalten wir

$$\left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\}\left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right\} = \left(\frac{-1}{A}\right)\left(\frac{a_2}{A}\right)\left(\frac{b_2}{B}\right)\left(\frac{c_2}{C}\right).$$

Analog wie in § 3 des ersten Kapitels setzen wir $\left(\frac{b_2}{B}\right) = [\beta]$, $\left(\frac{c_2}{C}\right) = [\gamma] = [\alpha'\,\beta]$. So gelangen wir zu der Formel:

$$(19.) \qquad \Pi'\left\{\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right\} = \left(\frac{-1}{A}\right)[\alpha]\,[\beta]\,[\alpha'\,\beta].$$

§ 3. Zur Berechnung des Produkts (19.) muß der Wert des Symbols $[\beta]$ ermittelt werden. Wir haben:

$$(20.) \qquad 2B = b_1^2 - (4k+2)\,b_2^2.$$

Die Zahl b_2 muß ungerade sein. Die Gleichung (20.) führt uns zu folgenden Relationen:

$$(21.) \qquad \left(\frac{2B}{b_2}\right) = +1, \quad \left(\frac{B}{b_2}\right) = \left(\frac{2}{b_2}\right),$$

$$[\beta] = \left(\frac{b_2}{B}\right) = (-1)^{\frac{B-1}{2}\cdot\frac{b_2-1}{2}}\left(\frac{2}{b_2}\right).$$

Die letzte Formel ist unter der Annahme richtig, daß von den Zahlen b_2, B wenigstens eine positiv ist.

Um den Wert des rechten Teiles der Formel (21.) zu ermitteln, muß man die Kategorien der Zahlen β nach dem Modul 8*) untersuchen. Leicht gelangen wir zur folgenden Tabelle:

(22.)

Kategorie I	$\Theta,\ 4+(4k+3)\,\Theta$
Kategorie II	$5\Theta,\ 4+(4k+7)\,\Theta$
Kategorie III	$4+\Theta,\ (4k+3)\,\Theta$
Kategorie IV	$4+5\Theta,\ (4k+7)\,\Theta$
Kategorie V	$4k+6+\Theta,\ 4k+6+(4k+7)\,\Theta$
Kategorie VI	$4k+6+5\Theta,\ 4k+6+(4k+3)\,\Theta$
Kategorie VII	$4k+2+\Theta,\ 4k+2+(4k+7)\,\Theta$
Kategorie VIII	$4k+2+5\Theta,\ \ 4k+2+(4k+3)\,\Theta$

Für die vier ersten Kategorien gilt $B \equiv 2k+3 \pmod 4$; für die vier letzten Kategorien $B \equiv 2k+1 \pmod 4$. Die Formel (21.) nebst der Tabelle (22.) führt uns zum folgenden Satz: *Das Symbol* $[\beta]$ *ist gleich* $+1$ *für Kategorien mit ungerader Nummer, und* -1 *für Kategorien mit gerader Nummer.*

*) Unter der Kategorie solcher Zahlen nach dem Modul 8 werden wir den Komplex aller Zahlen verstehen, die der Kongruenz

$$\beta \equiv \beta_0\,\alpha^2 \pmod 8$$

genügen, wo β_0 eine bestimmte Zahl ist, die nur durch die erste Potenz des Ideals $\mathfrak{w}$ teilbar ist, und α eine beliebige ungerade Zahl.

Um die Werte des Produkts (19.) berechnen zu können, muß man die Kategorie der Zahl $\alpha'\beta$, die durch die erste Potenz des Ideals $\mathfrak{w}$ teilbar ist, durch die Eigenschaften der Zahlen α und β bestimmen. Es läßt sich leicht erkennen, daß man zu diesem Zweck die Kategorien der ungeraden Zahlen α nach dem Modul $\mathfrak{w}^5$ untersuchen muß; ohne besondere Schwierigkeiten gelangen wir zur folgenden Tabelle dieser Kategorien:

(23.)

Kategorie I	$1,\ 4k+3+2\Theta$	$\left(\frac{-1}{A}\right)[\alpha]=+1$
Kategorie II	$5,\ 4k+7+2\Theta$	
Kategorie III	$1+2\Theta,\ 4k+3$	$\left(\frac{-1}{A}\right)[\alpha]=-1$
Kategorie IV	$5+2\Theta,\ 4k+7$	
Kategorie V	$1+\Theta,\ 4k+7+\Theta$	$\left(\frac{-1}{A}\right)[\alpha]=-1$
Kategorie VI	$5+\Theta,\ 4k+3+\Theta$	
Kategorie VII	$1+3\Theta,\ 4k+7+3\Theta$	$\left(\frac{-1}{A}\right)[\alpha]=+1$
Kategorie VIII	$5+3\Theta,\ 4k+3+3\Theta$	

Die Kategorie der Zahl α nach dem Modul $\mathfrak{w}^5$ und die Kategorie der Zahl β nach dem Modul 8 bestimmen vollständig die Kategorie der Zahl γ nach dem Modul 8 und aus demselben Grunde auch die Werte der Symbole $\left(\frac{-1}{A}\right)$, $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\gamma]$. Es ist leicht, sich zu überzeugen, daß die Werte des Produkts (19.) in ihrer Abhängigkeit von den Kategorien der Zahlen α und β in folgender Tabelle gegeben sind:

(24.)

Kategorien α.

Kategorien β.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
I und II	+1	−1	+1	−1	−1	+1	+1	−1
III und IV	+1	−1	+1	−1	+1	−1	−1	+1
V und VI	+1	−1	−1	+1	−1	+1	−1	+1
VII und VIII	+1	−1	−1	+1	+1	−1	+1	−1

Die Tabelle (24.) gibt die Werte des Produkts $\Pi'\left\{\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right\}$ nur bei gewissen Voraussetzungen betreffend die Vorzeichen der Zahlen α und β. Die Erwägungen § 5 und § 7 des ersten Kapitels liefern uns den Beweis dafür, daß diese Tabelle stets die Werte des Produkts $\left\{\frac{\alpha,\beta}{1}\right\}\left\{\frac{\alpha,\beta}{1'}\right\}\Pi'\left\{\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right\}$ angibt.

Die Tabelle (24.) *drückt den Ergänzungssatz zu allgemeinen Reziprozitätsgesetzen im quadratischen Zahlkörper* $K(\sqrt{4k+2})$ *aus. Das Produkt* $\left\{\frac{\alpha,\beta}{1}\right\}\left\{\frac{\alpha,\beta}{1'}\right\}\Pi'\left\{\frac{\alpha,\beta}{p}\right\}$ *wird durch die Kategorien der Zahl* α *und* β *nach dem Modul* $\mathfrak{w}^5$ *vollständig definiert.*

Viertes Kapitel. Von den Normenresten nach den Primidealteilern der Zahl 2 im quadratischen Zahlkörper.

§ 1. In diesem Paragraphen werden wir folgenden Hilfssatz beweisen*):

Es sei μ *eine beliebige ganze Zahl des Körpers* k, *in der das Ideal* $\mathfrak{w}$ *in der m-ten Potenz aufgeht; die Zahl* 2 *sei durch* $\mathfrak{w}^l$ *teilbar.*

Wenn μ *quadratischer Rest nach dem Ideal* $\mathfrak{w}$ *ist, dann kann eine beliebige ganze Zahl des Körpers* $K(\sqrt{\mu})$ *so in der Gestalt* $\frac{\alpha+\beta\sqrt{\mu}}{\gamma}$ *geschrieben werden, daß die Zahl* γ *höchstens durch* $\mathfrak{w}^{l+\frac{m}{2}}$ *teilbar ist.*

Wenn aber die Zahl μ *kein quadratischer Rest nach dem Ideal* $\mathfrak{w}$ *ist, dann sei* n *der höchste Exponent, bei dem im Körper* k *die Kongruenz* $x^2 \equiv \mu \pmod{\mathfrak{w}^n}$ *möglich ist. Eine beliebige ganze Zahl des Körpers* $K(\sqrt{\mu})$ *kann in die Gestalt des Bruches* $\frac{\alpha+\beta\sqrt{\mu}}{\gamma}$ *gebracht werden, wo der Nenner* γ *genau durch* $\mathfrak{w}^c$ *teilbar ist, wobei* $2c \leqq n$.

Es sei die Zahl α genau durch $\mathfrak{w}^a$, die Zahl β durch $\mathfrak{w}^b$, die Zahl γ genau durch $\mathfrak{w}^c$ teilbar. Wir können annehmen, daß die kleinste der drei Zahlen a, b, c gleich Null ist. Die Zahlen $\frac{2\alpha}{\gamma}$, $\frac{2\beta\sqrt{\mu}}{\gamma}$, $\frac{\alpha^2-\beta^2\mu}{\gamma^2}$ müssen ganz sein. Daraus folgen die Ungleichungen:

$$(25.) \qquad a+l \geqq c,\ b+l+\frac{m}{2} \geqq c.$$

Die Zahl a kann nicht kleiner als die Zahl b und c sein, da die entgegengesetzte Annahme der Kongruenz $\beta^2\mu \equiv \alpha^2 \pmod{\gamma^2}$ widerspräche. Deshalb können für uns zwei Fälle in Betracht kommen.

Erster Fall. Von den Zahlen a, b, c ist c die kleinste Zahl. In diesem Falle kann man $c=0$ annehmen, d. h. die Zahl γ ist relativ prim zu $\mathfrak{w}$.

---

*) Ein ähnlicher Satz findet sich bei *Sommer*, Vorlesungen über Zahlentheorie, S. 298 – 299.

Zweiter Fall. Von den Zahlen a, b, c ist b die kleinste Zahl. Wir haben $b = 0$, $\beta^2 \mu \equiv \alpha^2 \pmod{\mathfrak{w}^{2c}}$. Wir bestimmen die Zahl β_1 aus der Kongruenz $\beta\beta_1 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{w}^{2c}}$ und erhalten $\mu \equiv (\alpha\beta_1)^2 \pmod{\mathfrak{w}^{2c}}$, was in Verbindung mit den Ungleichungen (25.) den Satz beweist.

§ 2. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{w}$ ein Primideal des quadratischen Zahlkörpers, dessen l-te Potenz in der Zahl 2 aufgeht. Der Satz § 5 des zweiten Kapitels erlaubt uns, uns zu beschränken auf die Berechnung des Symbols $\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\}$ in den Fällen, in denen die Zahlen ν, μ durch die zweite Potenz des Ideals $\mathfrak{w}$ nicht teilbar sind. Auf diese Weise haben wir vier Fälle zu untersuchen:

1) die Zahlen ν und μ sind beide relativ prim zum Ideal $\mathfrak{w}$;
2) die Zahl ν ist relativ prim zu $\mathfrak{w}$, die Zahl μ ist durch $\mathfrak{w}$ teilbar;
3) die Zahl ν ist durch $\mathfrak{w}$ teilbar, die Zahl μ ist relativ prim zu $\mathfrak{w}$;
4) die Zahlen ν und μ sind beide durch $\mathfrak{w}$ teilbar.

Durch die Formel $\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = \left\{\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{w}}\right\}$ wird der dritte Fall, durch die Formel $\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = \left\{\frac{-\nu\mu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\}$, die sich auf die Gleichung $N_k(\sqrt{\mu}) = -\mu$ stützt, der vierte Fall erledigt. Wir haben daher nur die Fälle zu untersuchen, in denen die Zahl ν relativ prim zum Ideal $\mathfrak{w}$ ist. Die Sätze § 3 des zweiten Kapitels zeigen, daß das Symbol $\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\}$ nur dann gleich $+1$ ist, wenn die Kongruenz

$$\nu \equiv N_k(A) \pmod{\mathfrak{w}^{2l+1}}$$

gilt. Hierin ist A eine ganze Zahl des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ und $N_k(A)$ bezeichnet die Relativnorm dieser Zahl. Der Satz § 1 dieses Kapitels führt uns zu folgenden Schlüssen:

Wenn der Ausdruck $\nu + \alpha^2 \mu$, in dem α eine ganze Zahl des quadratischen Zahlkörpers ist, dem vollen Quadrat nach dem Modul $\mathfrak{w}^{2l+1}$ kongruent ist, dann gilt die Gleichung $\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = +1$. Wenn die Kongruenz $\mu \equiv \beta^2 \pmod{\mathfrak{w}^2}$ unmöglich ist und wenn der Ausdruck $\nu + \alpha^2 \mu$ bei keinerlei Bedeutung der Zahl α dem vollen Quadrat nach dem Modul $\mathfrak{w}^{2l+1}$ kongruent ausfällt, dann gilt die Gleichung $\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = -1$.

Zum Schluß dieses Paragraphen machen wir darauf aufmerksam,

daß der Wert des Symbols $\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\}$ ersichtlich durch die Kategorien der Zahlen ν und μ nach dem Modul $\mathfrak{w}^{2l+1}$ vollständig bestimmt wird.

§ 3. Im quadratischen Zahlkörper $K(\sqrt{4k+2})$ ist die Zahl 2 das Quadrat des Primideals $\mathfrak{w} = [2, \Theta]$. Die zu $\mathfrak{w}$ relativ primen Zahlen sind zu gleicher Zeit ungerade Zahlen. In diesem Paragraphen stellen wir uns die Aufgabe, den Wert des Symbols $\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\}$ für den Fall zu ermitteln, daß beide Zahlen ν und μ ungerade sind. Die Tabelle (23.) gibt uns folgende Vertreter der Kategorien ungerader Zahlen nach dem Modul $\mathfrak{w}^{2l+1} = \mathfrak{w}^5$:

(26.) $$1,\ 5,\ 1+2\Theta,\ 5+2\Theta,\ 1+\Theta,\ 5+\Theta,\ 1+3\Theta,\ 5+3\Theta.$$

Volle Quadrate geben nach dem Modul $\mathfrak{w}^5$ die folgenden Reste:

$$0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 4k+3+2\Theta.$$

Die Sätze § 2 dieses Kapitels lassen uns ohne Schwierigkeiten eine Tabelle der Werte des Symbols $\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\}$ in Abhängigkeit von den Kategorien der Zahlen ν und μ zusammenstellen. Dabei erweist es sich, daß das Symbol $\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\}$ schon durch die Kategorien nach dem Modul 4 bestimmt wird. Wir erhalten eine solche Tabelle:

(27.)

	I	II	III	IV
I	+1	+1	+1	+1
II	+1	+1	−1	−1
III	+1	−1	−1	+1
IV	+1	−1	+1	−1

.

§ 4. In diesem Paragraphen werden wir uns mit der Berechnung des Symbols $\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\}$ für den Fall befassen, daß die Zahl μ durch die erste Potenz des Ideals $\mathfrak{w} = [2, \Theta]$ teilbar ist. Eine solche Zahl μ kann ersichtlich niemals einem vollen Quadrat nach dem Modul $\mathfrak{w}^2$ kongruent sein. Wir müssen die Kategorien der Zahl μ nach dem Modul $\mathfrak{w}^5$ untersuchen; deshalb genügt es, der Tabelle (22.) folgende Vertreter der Zahlen μ zu entnehmen:

$$\Theta,\ 4+\Theta,\ 4k+6+\Theta,\ 4k+2+\Theta.$$

Als Vertreter der Zahlen ν müssen die Zahlen (26.) genommen werden. Mit Heranziehung der Sätze § 2 dieses Kapitels gelangen wir zur folgenden Tabelle

der Werte des Symbols $\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\}$ in Abhängigkeit von den Kategorien der Zahlen ν nach dem Modul $\mathfrak{w}^5$ und den Kategorien der Zahlen μ nach dem Modul 8:

(28.)

Kategorien μ.	Kategorien ν. I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
I und II	+1	−1	+1	−1	−1	+1	+1	−1
III und IV	+1	−1	+1	−1	+1	−1	−1	+1
V und VI	+1	−1	−1	+1	−1	+1	−1	+1
VII und VIII	+1	−1	−1	+1	+1	−1	+1	−1

§ 5. *In diesem Paragraphen beweisen wir die Richtigkeit der Formel*

$$\left\{\frac{\nu_1, \mu}{\mathfrak{w}}\right\}\left\{\frac{\nu_2, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = \left\{\frac{\nu_1 \nu_2, \mu}{\mathfrak{w}}\right\}, \tag{29.}$$

in der ν_1, ν_2, μ beliebige ganze Zahlen des quadratischen Zahlkörpers sind.

Der Satz § 5 des zweiten Kapitels erlaubt uns, uns auf die Fälle zu beschränken, daß keine von den Zahlen ν_1, ν_2, μ durch $\mathfrak{w}^2$ teilbar ist.

Erster Fall. Die Zahlen ν_1 und ν_2 sind beide relativ prim zum Ideal $\mathfrak{w}$. Mit Heranziehung der Tabellen (27.) und (28.) wird es nicht schwer, sich von der Richtigkeit der Formel (29.) zu überzeugen.

Zweiter Fall. Die Zahl ν_1 ist durch $\mathfrak{w}$ teilbar, die Zahlen ν_2 und μ sind beide relativ prim zu $\mathfrak{w}$. Bei Benutzung der Tabellen (27.) und (28.) gelangen wir zu der Gleichung

$$\left\{\frac{\mu, \nu_1}{\mathfrak{w}}\right\}\left\{\frac{\mu, \nu_2}{\mathfrak{w}}\right\} = \left\{\frac{\mu, \nu_1 \nu_2}{\mathfrak{w}}\right\}.$$

Der Satz § 4 des zweiten Kapitels beweist die Richtigkeit der Formel (29.).

Dritter Fall. Die Zahl ν_1 ist relativ prim zu $\mathfrak{w}$, die Zahlen μ und ν_2 sind durch $\mathfrak{w}$ teilbar. Die Zahl $-\mu\nu_2$ ist durch $\mathfrak{w}^2$ teilbar. Auf Grund des Satzes § 5 des zweiten Kapitels gibt es eine ganze Zahl ν_3, die relativ prim zu $\mathfrak{w}$ ist, wobei der Bruch $\frac{-\mu\nu_2}{\nu_3}$ ein volles Quadrat ist. Da die Zahlen ν_1 und ν_3 zum Ideal $\mathfrak{w}$ relativ prim sind, können wir schreiben:

$$\left\{\frac{\nu_1, \mu}{\mathfrak{w}}\right\}\left\{\frac{\nu_3, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = \left\{\frac{\nu_1 \nu_3, \mu}{\mathfrak{w}}\right\}.$$

Nun stellen wir neue Gleichungen auf:

$$\left\{\frac{\nu_3, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = \left\{\frac{-\mu\nu_2, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = \left\{\frac{\nu_2, \mu}{\mathfrak{w}}\right\}, \quad \left\{\frac{\nu_1 \nu_3, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = \left\{\frac{-\mu\nu_1\nu_2, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = \left\{\frac{\nu_1\nu_2, \mu}{\mathfrak{w}}\right\},$$

welche die Richtigkeit der Formel (29.) beweisen.

Vierter Fall. Die Zahlen ν_1 und ν_2 sind beide durch das Ideal $\mathfrak{w}$ teilbar. Wir bestimmen die Zahl σ des quadratischen Körpers durch die Kongruenz

$$\nu_1 \equiv \nu_2\,\sigma \pmod{\mathfrak{w}^{2l+2}}. \tag{30.}$$

Es ist ersichtlich, daß die Zahl σ relativ prim zum Ideal $\mathfrak{w}$ ist. Wir dürfen weiter die Formel aufstellen:

$$\left\{\frac{\nu_2, \mu}{\mathfrak{w}}\right\}\left\{\frac{\sigma, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = \left\{\frac{\nu_2\,\sigma, \mu}{\mathfrak{w}}\right\}.$$

Der Satz § 3 des zweiten Kapitels führt zur Gleichung

$$\left\{\frac{\nu_1, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = \left\{\frac{\nu_2\,\sigma, \mu}{\mathfrak{w}}\right\},$$

woraus folgt

$$\left\{\frac{\nu_1, \mu}{\mathfrak{w}}\right\}\left\{\frac{\nu_2, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = \left\{\frac{\sigma, \mu}{\mathfrak{w}}\right\}. \tag{31.}$$

Die Kongruenz (30.) gibt uns:

$$\nu_1\,\nu_2 \equiv \nu_2^2\,\sigma \pmod{\mathfrak{w}^{2l+3}},$$

woraus wir erhalten:

$$\left\{\frac{\nu_1\,\nu_2, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = \left\{\frac{\nu_2^2\,\sigma, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = \left\{\frac{\sigma, \mu}{\mathfrak{w}}\right\}.$$

Die Gleichung (31.) beweist die Richtigkeit der Formel (29.), die nun in allen Fällen bewiesen ist.

Der Satz § 4 des zweiten Kapitels führt uns zu einer neuen Formel:

$$\left\{\frac{\nu, \mu_1}{\mathfrak{w}}\right\}\left\{\frac{\nu, \mu_2}{\mathfrak{w}}\right\} = \left\{\frac{\nu, \mu_1\,\mu_2}{\mathfrak{w}}\right\}. \tag{32.}$$

Es läßt sich leicht einsehen, daß die Formeln (29.) und (32.) auch dann richtig bleiben, wenn sie auf die Symbole $\left\{\frac{\nu, \mu}{1}\right\}$ und $\left\{\frac{\nu, \mu}{1'}\right\}$ ausgedehnt werden.

Fünftes Kapitel. Das *Hilbert*sche Reziprozitätsgesetz im quadratischen Zahlkörper.

§ 1. In diesem Schlußkapitel wollen wir zeigen, daß immer die Gleichung gilt

$$\prod_{(\omega)}\left\{\frac{\nu, \mu}{\omega}\right\} = +1, \tag{33.}$$

wo sich das Produkt Π über sämtliche Primideale des Körpers und außerdem im Falle reeller Körper auch über besondere symbolische Bedeutungen 1 und 1′ der Zahl ω erstreckt.

Die Gleichung (33.) drückt das sogenannte *Hilbert*sche Reziprozitätsgesetz im quadratischen Zahlkörper aus.

§ 2. Der Kürze wegen wollen wir uns folgender Bezeichnung bedienen:

$$\prod_{(\omega)} \left\{\frac{\nu, \mu}{\omega}\right\} = \{\nu, \mu\}.$$

Es ist leicht, sich von der Richtigkeit der Relationen

$$\{\nu, \mu_1\}\ \{\nu, \mu_2\} = \{\nu, \mu_1\ \mu_1\},$$
$$\{\nu_1, \mu\}\ \{\nu_2, \mu\} = \{\nu_1\ \nu_2, \mu\},$$
$$\{\nu, \mu\} = \{-\nu\mu, \mu\}$$

zu überzeugen.

Auf Grund der Tabellen (9.), (24.), (27.) und (28.) gelangen wir zu dem Satz: *Wenn die ganzen Zahlen ν und μ relativ prim zueinander sind, dann gilt immer die Gleichung $\{\nu, \mu\} = +1$.*

§ 3. Wir wollen nun folgenden Hilfssatz beweisen:

Es mögen die Zahlen $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ des quadratischen Körpers den Gleichungen genügen

$$\alpha_1 = \mathfrak{a}_1\, \mathfrak{d}_1, \quad \beta_1 = \mathfrak{b}_1\, \mathfrak{d}_1$$
$$\alpha_2 = \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{d}_2, \quad \beta_2 = \mathfrak{b}_2\, \mathfrak{d}_2,$$

in denen die Ideale $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{d}_2$ relativ prim zueinander sind und wo $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ zu derselben Idealklasse gehören. Dann gilt stets die Gleichung

$$\{\alpha_1, \beta_1\} = \{\alpha_2, \beta_2\}.$$

Um den Satz zu beweisen, wählen wir das Ideal $\mathfrak{d}_3$ so, daß es den Idealen $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ äquivalent und zu der Zahl $\alpha_1\, \alpha_2\, \beta_1\, \beta_2$ relativ prim ist. Das Ideal $\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{d}_3^2$ muß Hauptideal sein; wir setzen:

$$\alpha_3 = \mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{d}_3^2, \quad \beta_3 = \frac{\alpha_3\, \beta_1\, \beta_2}{\alpha_1\, \alpha_2} = \mathfrak{b}_1\, \mathfrak{b}_2\, \mathfrak{d}_3^2.$$

Die Gleichungen

$$\{\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3,\ \beta_1\, \beta_2\, \beta_3\} = \{-\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \beta_1\, \beta_2\, \beta_3,\ \beta_1\, \beta_2\, \beta_3\} =$$
$$= \{-(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3)^2,\ \beta_1\, \beta_2\, \beta_3\} = \{-1, \beta_1\, \beta_2\, \beta_3\}$$

ergeben

$$\{\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3,\ \beta_1\, \beta_2\, \beta_3\} = +1.$$

Auf Grund des § 2 dieses Kapitels erhalten wir:

$$\prod_{(i,k)} \{\alpha_i, \beta_k\} = +1,$$

worin die Buchstaben i und k die Werte 1, 2, 3 annehmen und bei verschiedenen Indizes i, k α_i und β_k relativ prim zueinander sind; daher können wir folgern:

$$\{\alpha_1, \beta_1\}\ \{\alpha_2, \beta_2\}\ \{\alpha_3, \beta_3\} = +1.$$

Der Satz § 5 des zweiten Kapitels läßt uns leicht die Richtigkeit der Gleichung $\{\alpha_3, \beta_3\} = +1$ erkennen.

Wir erhalten

$$\{\alpha_1, \beta_1\}\{\alpha_2, \beta_2\} = +1, \quad \{\alpha_1, \beta_1\} = \{\alpha_2, \beta_2\},$$

was zu beweisen war.

§ 4. In diesem Paragraphen führen wir den Beweis dafür aus, daß das Symbol $\{\nu, \mu\}$ auch dann gleich $+1$ ist, wenn die Zahlen ν und μ nicht relativ prim zueinander sind.

Auf Grund des Satzes § 5 des zweiten Kapitels gibt es Zahlen α_1, β_1 mit folgenden Eigenschaften:

1) die Brüche $\frac{\mu}{\beta_1}$ und $\frac{\nu}{\alpha_1}$ sind volle Quadrate;

2) jeder gemeinsame Primidealteiler der Zahlen α_1 und β_1 geht in beiden Zahlen nur in der ersten Potenz auf.

Wir stellen die Gleichung auf

$$\{\nu, \mu\} = \{\alpha_1, \beta_1\}.$$

Dann setzen wir:

$$\alpha_1 = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{d}_1, \quad \beta_1 = \mathfrak{b}_1 \mathfrak{d}_1,$$

wobei $\mathfrak{d}_1$ der größte gemeinsame Teiler der Zahlen α_1 und β_1 ist. Die Ideale $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d}_1$ müssen relativ prim zueinander sein.

Wir bestimmen das Ideal $\mathfrak{a}$, *das dem Ideal* $\mathfrak{a}_1$ *äquivalent und relativ prim zur Zahl* $2\alpha_1 \cdot \beta_1$ *ist und keine rationalen Teiler hat.*

Darauf bestimmen wir das Ideal $\mathfrak{d}$, *das dem Ideal* $\mathfrak{d}_1$ *äquivalent ist, keine rationalen Teiler hat und zur Diskriminante des quadratischen Zahlkörpers und zur Zahl* $2N(\alpha_1 \beta_1) N(\mathfrak{a})$ *relativ prim ist.*

Es sei $\mathfrak{d}'$ das zu $\mathfrak{d}$ konjugierte Ideal; wir setzen:

$$\alpha = \mathfrak{a}\mathfrak{d}, \quad D = \mathfrak{d}'\mathfrak{d},$$

worin D eine positive rationale Zahl ist. Die ambigen Primideale des quadratischen Zahlkörpers können nicht im Ideal $\mathfrak{d}$ aufgehen*), weshalb die Ideale $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}'$ relativ prim zueinander sind. Es läßt sich leicht ersehen, daß alle Ideale $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{a}, \mathfrak{d}, \mathfrak{d}'$ relativ prim zueinander sind. Aus Satz § 3 folgt die Gleichung

$$\{\alpha_1, \beta_1\} = \{\alpha, D\},$$

woraus wir mit Rücksicht auf (34.) erhalten:

(35.) $$\{\nu, \mu\} = \{\alpha, D\}.$$

Nun berechnen wir das Symbol $\{\alpha, D\}$. Vor allem haben wir:

$$\left\{\frac{\alpha, D}{1}\right\} = +1, \quad \left\{\frac{\alpha, D}{1'}\right\} = +1,$$

*) *Hilbert*, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Satz 105, p. 302.

da die Zahl D rational und positiv ist. Die Norm der Zahl α bezeichnen wir mit AD; dann ist $N(\mathfrak{a}) = \pm A$. Wir können die Gleichungen schreiben:

$$\frac{\alpha}{D} = \frac{\alpha\alpha'}{D\alpha'} = \frac{AD}{D\alpha'} = \frac{A}{\alpha'}. \tag{36.}$$

Die Eigenschaften der Normenrestsymbole*) und die Gleichung (36.) führen uns zu der Relation

$$\Pi' \left\{\frac{\alpha, D}{p}\right\} = \left\{\frac{D}{\mathfrak{a}}\right\} \left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{d}'}\right\} \left\{\frac{-A\alpha'}{\mathfrak{d}}\right\}. \tag{37.}$$

Mit Hilfe der Ausführungen des § 2 des ersten Kapitels erhalten wir leicht die Formeln:

$$\left\{\frac{D}{\mathfrak{a}}\right\} = \left(\frac{D}{A}\right), \quad \left\{\frac{-A}{\mathfrak{d}}\right\} = \left(\frac{-A}{D}\right). \tag{38.}$$

Die Gleichungen (37.) und (38.) in Verbindung mit der leicht zu ersehenden Relation $\left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{d}'}\right\} = \left\{\frac{\alpha'}{\mathfrak{d}}\right\}$ ergeben:

$$\Pi' \left\{\frac{\alpha, D}{p}\right\} = \left(\frac{D}{A}\right)\left(\frac{-A}{D}\right) = (-1)^{\frac{D-1}{2}\cdot\frac{A+1}{2}}. \tag{39.}$$

Wegen der Formel (39.) läßt sich das Produkt $\Pi' \left\{\frac{\alpha, D}{p}\right\}$ in Abhängigkeit von den Kategorien der Zahlen α und D nach dem Modul 4 berechnen.

Erster Fall. Wenn die Zahl D zur I. Kategorie gehört, dann ist $D \equiv 1 \pmod 4$. Aus der Formel (39.) folgt $\Pi' \left\{\frac{\alpha, D}{p}\right\} = +1$.

Zweiter Fall. Es gehöre die Zahl D zur II. Kategorie, d. h. $D \equiv 3 \pmod 4$. Wenn die Zahl α der I. oder II. Kategorie angehört, dann ist $N(\alpha) \equiv 1 \pmod 4$, $AD \equiv 1 \pmod 4$, $A \equiv 3 \pmod 4$; aus der Formel (39.) folgt $\Pi' \left\{\frac{\alpha, D}{p}\right\} = +1$. Wenn aber die Zahl α der III. oder IV. Kategorie angehört, dann ist $N(\alpha) \equiv 3 \pmod 4$, $AD \equiv 3 \pmod 4$, $A \equiv 1 \pmod 4$; aus der Formel (39.) folgt $\Pi' \left\{\frac{\alpha, D}{p}\right\} = -1$.

Die erhaltenen Resultate führen uns mit Hilfe der Tabelle (27.) zur Gleichung $\{\alpha, D\} = +1$. Aus der Formel (35.) folgt $\{\nu, \mu\} = +1$, d. h. sie bestätigt die Richtigkeit des *Hilbert*schen Reziprozitätsgesetzes für ganz beliebige ganze Zahlen ν und μ.

---

*) *Hilbert*, Relativquadratischer Zahlkörper, Mathematische Annalen 51, Satz 13, p. 18.

Die Zerlegungsgruppe.

Von Herrn *Andreas Speiser* in Zürich.

In der neueren Entwicklung der algebraischen Zahlentheorie ist die fundamentale Bedeutung der von Herrn *Hilbert* entdeckten, zu einem Diskriminantenteiler eines *Galois*schen Körpers gehörigen Zerlegungsgruppe*) immer klarer hervorgetreten. Von dieser Gruppe sind jedoch bisher nur ganz wenige Eigenschaften bekannt. Im folgenden soll daher eine nähere Untersuchung dieser auch gruppentheoretisch äußerst interessanten Gruppe gegeben werden; es zeigt sich, daß sie zu einem ganz bestimmten Typus gehört, unabhängig vom gerade betrachteten Körper. Durch die Bedingung, daß sie Untergruppe der Körpergruppe sein muß, ergeben sich jeweils arithmetische Eigenschaften des Diskriminantenteilers. Der Fundamentalsatz über *Abel*sche Körper folgt aus ihnen ohne irgendwelche höheren zahlentheoretischen Begriffe (§ 2). Als Anwendungen (§ 4) bringen wir zunächst eine weite Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes: Geht nämlich das Primideal $\mathfrak{P}$ in p genau zur t-ten Potenz auf und bezeichnet man mit $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \ldots$ die untereinander verschiedenen mit $\mathfrak{P}$ konjugierten Primideale, ferner mit $\mathfrak{p}$ ihr Produkt, so ist $(p) = \mathfrak{p}^t$. Ist nun die Zerlegungsgruppe *Abel*sch, so zeigen wir, daß derjenige Teil des Klassenkörpers, durch den $\mathfrak{p}$ zum Hauptideal wird, durch Adjunktion eines Kreiskörpers vom Grade t erzeugt wird. Schließlich werden noch die Resultate, die Herr *Fueter* im II. Kapitel seiner Abhandlung „*Abel*sche Körper in quadratisch imaginären Zahlenkörpern“ (Math. Ann. 75 S. 177) abgeleitet hat, in verallgemeinerter Gestalt wiedergefunden.

Die angewendete Methode läßt sich folgendermaßen charakterisieren: Bekanntlich bilden die Reste nach der Potenz eines Primideals nach der

*) *Hilbert*, Theorie der algebraischen Zahlkörper §§ 39 — 47. Jahresber. der D. Mathemathiker-Vereinigung Bd. IV.

Bezeichnung von Herrn *Hensel* ein *System p-adischer Zahlen.* Wir untersuchen die *Gruppe der Automorphismen* (vgl. 1.) eines solchen Systems.

§ 1. Die Zerlegungsgruppe.

1. Zunächst soll kurz an die Definition der Zerlegungsgruppe eines Primideals $\mathfrak{P}$ im Körper K erinnert werden.

Ist Π eine beliebige durch $\mathfrak{P}$, aber nicht durch $\mathfrak{P}^2$ teilbare ganze Zahl, so lassen sich die Reste (mod. $\mathfrak{P}^t$) auf eine und nur eine Weise in der Gestalt darstellen:

$$\alpha_0 + \alpha_1 \Pi + \cdots + \alpha_{t-1} \Pi^{t-1},$$

wobei die Koeffizienten α alle Reste mod. $\mathfrak{P}$ durchlaufen.

Diejenigen Substitutionen der Körpergruppe, welche $\mathfrak{P}$ ungeändert lassen, bilden die *Zerlegungsgruppe* $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{P}$. Übt man eine Substitution aus $\mathfrak{Z}$ auf die Reste mod. $\mathfrak{P}^t$ aus, so geht das System wiederum in ein vollständiges Restsystem mod. $\mathfrak{P}^t$ über. Dabei bleiben aber die Additions- und Multiplikationsgesetze bestehen, d. h. ist $\alpha + \beta \equiv \gamma$, resp. $\alpha\beta \equiv \gamma$ eine Kongruenz mod. $\mathfrak{P}^t$, so ist auch $\alpha' + \beta' \equiv \gamma'$ resp. $\alpha'\beta' \equiv \gamma'$ eine richtige Kongruenz, wenn wir allgemein die konjugierte Zahl mit einem Strich bezeichnen. Dies nennt man einen *Automorphismus* des Restsystems.

2. Die Zerlegungsgruppe enthält eine Reihe von Normalteilern (invarianten Untergruppen), deren Definition wir nun geben werden. Die Reste mod. $\mathfrak{P}$ bilden bekanntlich nach der Multiplikation, wenn man die 0 wegläßt, eine zyklische Gruppe von der Ordnung $p^n - 1$, wobei p^n die Norm von $\mathfrak{P}$ ist, die sämtlichen Reste dagegen nach dem Gesetz der Addition eine *Abel*sche Gruppe mit n Basiselementen, die sämtlich die Ordnung p haben, d. h. eine *Abel*sche Gruppe vom Typus $(p, p, \ldots\ n\text{-mal})$.

Betrachtet man die Vertauschungen, welche diese Reste mod. $\mathfrak{P}$ unter der Zerlegungsgruppe erfahren, so ergeben auch sie einen Automorphismus, und zwar einen der n durch die Gleichung $\varrho' \equiv \varrho^{p^i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ definierten, wobei ϱ eine Primitivzahl mod. $\mathfrak{P}$ ist. Diese Automorphismen bilden eine zyklische Gruppe von der Ordnung n, die erzeugt wird durch $\varrho' \equiv \varrho^p$.

Diejenigen Substitutionen, welche die Reste mod. $\mathfrak{P}$ *nicht* vertauschen, bilden einen Normalteiler $\mathfrak{T}$ der Zerlegungsgruppe, welcher *Trägheitsgruppe* heißt. Die Faktorgruppe $\mathfrak{Z}/\mathfrak{T}$ ist also zyklisch und von der Ordnung n.

Hilbert beweist, daß jede Zahl des Körpers mod. $\mathfrak{P}$ einer Zahl des zu $\mathfrak{T}$ gehörigen Trägheitskörpers kongruent ist, insbesondere können also sowohl ϱ als die Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ in diesem letzteren angenommen werden. Ist ferner $\mathfrak{p}$ das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal im Trägheitskörper, so wird $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^t$, wo t die Ordnung der Trägheitsgruppe ist.

Diejenigen Substitutionen von $\mathfrak{Z}$, welche die Reste mod. $\mathfrak{P}^2$ nicht vertauschen, bilden einen Normalteiler $\mathfrak{V}$, der *Verzweigungsgruppe* genannt wird.

3. Es muß nun die Faktorgruppe $\mathfrak{Z}/\mathfrak{V}$ bestimmt werden; sie ist holoedrisch isomorph mit der Permutationsgruppe der Reste mod. $\mathfrak{P}^2$.

Wählt man zunächst, um $\mathfrak{T}/\mathfrak{V}$ zu bestimmen, eine Substitution aus $\mathfrak{T}$, so hat sie die Gestalt:

$$\Pi' \equiv \alpha\, \Pi \pmod{\mathfrak{P}^2};$$

denn die Koeffizienten α_0 und α_1 bleiben ungeändert, und Π muß übergehen in einen Rest, der ebenfalls durch $\mathfrak{P}$ teilbar ist.

Ist $\Pi' \equiv \beta\, \Pi$ eine zweite Substitution aus $\mathfrak{T}$, so ergibt die Zusammensetzung

$$\Pi' \equiv \alpha\beta\, \Pi \pmod{\mathfrak{P}^2}.$$

Hieraus schließt man, daß die Gruppe $\mathfrak{T}/\mathfrak{V}$ eine Untergruppe der *multiplikativen* Gruppe der Reste mod. $\mathfrak{P}$ ist, d. h. eine zyklische Gruppe, deren Ordnung ein Teiler von $p^n - 1$ ist.

Geht man nun zu einer Substitution aus $\mathfrak{Z}$ über, so hat sie die Gestalt:

$$A: \quad \begin{aligned} \varrho' &\equiv \varrho^{p^i} \\ \Pi' &\equiv \varrho^a\, \Pi \end{aligned} \pmod{\mathfrak{P}^2}.$$

A^n liegt in der Gruppe $\mathfrak{T}$. Wir müssen nun noch A^{-1} bilden und finden sofort dafür

$$A^{-1}: \quad \begin{aligned} \varrho' &\equiv \varrho^{p^{n-i}} \\ \Pi' &\equiv \varrho^{-a p^{n-1}}\, \Pi. \end{aligned}$$

Nunmehr sei B: $\Pi' \equiv \alpha\, \Pi$ eine erzeugende Substitution von $\mathfrak{T}/\mathfrak{V}$, so daß jede eine Potenz von B ist. Ebenso sei A als *erzeugende* Substitution von $\mathfrak{Z}/\mathfrak{T}$ gewählt, so daß $i = 1$ wird, dann erhält man für

$$A^{-1}BA: \quad \begin{aligned} \varrho' &\equiv \varrho \\ \Pi' &\equiv \alpha^p\, \Pi, \end{aligned}$$

also $A^{-1}BA = B^p$.

Damit ist $\mathfrak{Z}/\mathfrak{V}$ vollständig bestimmt, und das Resultat kann in folgendem Satz ausgesprochen werden:

Satz 1. Die Gruppe $\mathfrak{Z}/\mathfrak{V}$ enthält einen zyklischen Normalteiler $\mathfrak{T}/\mathfrak{V}$, dessen Ordnung ein Teiler von $p^n - 1$ ist und dessen Faktorgruppe ebenfalls zyklisch und von der Ordnung n ist. Ihr Typus ist: $B^r = E$, $A^n =$ Potenz von B, $A^{-1} B A = B^p$.

4. Diejenigen Substitutionen, welche die Reste mod. $\mathfrak{P}^{i+1}$ nicht vertauschen, bilden einen Normalteiler $\mathfrak{V}_i$ von $\mathfrak{Z}$. In dieser Bezeichnungsweise ist $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1$. Die Gruppen $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots$ brauchen nicht voneinander verschieden zu sein, indem sehr wohl die Gruppe, welche die Reste mod. $\mathfrak{P}^i$ ungeändert läßt, auch nach einer höheren Potenz von $\mathfrak{P}$ dieselbe Eigenschaft besitzen kann. *Hilbert* bezeichnet die erste von $\mathfrak{V}$ verschiedene Untergruppe als die einmal überstrichene Verzweigungsgruppe $\overline{\mathfrak{V}}$ usw. Es sei $\overline{\mathfrak{V}}$ eine $\mathfrak{V}_i$ und also $\mathfrak{V}$ eine $\mathfrak{V}_{i-1}$; dann hat mod. $\mathfrak{P}^{i+1}$ eine Substitution von $\mathfrak{V}$ die Gestalt:

$$\Pi' \equiv \Pi + \alpha \Pi^i \pmod{\mathfrak{P}^{i+1}}.$$

Liegt sie bereits in $\overline{\mathfrak{V}}$, so ist $\alpha \equiv 0$ zu setzen. Ist nun

$$\Pi' \equiv \Pi + \beta \Pi^i \pmod{\mathfrak{P}^{i+1}}$$

eine zweite, so liefert die Zusammensetzung die Substitution:

$$\Pi' \equiv \Pi + (\alpha + \beta) \Pi^i \pmod{\mathfrak{P}^{i+1}}.$$

Die Reste (mod. $\mathfrak{P}^{i+1}$) erfahren also unter den Substitutionen von $\mathfrak{V}$ eine Gruppe von Vertauschungen, die holoedrisch isomorph ist mit einer Untergruppe der *additiven* Gruppe der Reste (mod. $\mathfrak{P}$), d. h. ihre Ordnung ist eine Potenz von p, sie ist *Abel*sch und vom Typus

$$(p, p, \ldots\ m\text{-mal}) \quad (m \leqq n).$$

In der Reihe der Verzweigungsgruppen $\mathfrak{V}, \overline{\mathfrak{V}}, \overline{\overline{\mathfrak{V}}}, \ldots$ ist die Faktorgruppe je zweier aufeinanderfolgenden Gruppen von dieser Beschaffenheit, denn in dem obigen Beweis ist nirgends davon Gebrauch gemacht, daß $\mathfrak{V}$ gerade die erste Verzweigungsgruppe ist.

Satz 2. Ist $\mathfrak{V}, \overline{\mathfrak{V}}, \overline{\overline{\mathfrak{V}}}, \ldots$ die Reihe der Verzweigungsgruppen, so ist jede dieser Gruppen Normalteiler von $\mathfrak{Z}$, und die Faktorgruppe zweier aufeinanderfolgenden ist eine *Abel*sche Gruppe von der Ordnung p^m $(m \leqq n)$ und vom Typus $(p, p, \ldots)$.

Die p-te Potenz einer Substitution aus einer Verzweigungsgruppe gehört also stets der nächstfolgenden an.

§ 2. Der Fundamentalsatz über *Abel*sche Körper.

5. Die in § 1 entwickelten Sätze genügen bereits, den *Kronecker*schen Fundamentalsatz zu beweisen:

Satz: Jeder Abelsche Körper ist ein Kreiskörper.

Beweis: Es genügt, solche Körper zu betrachten, deren Grad eine Primzahlpotenz l^m ist. Ist zunächst $\mathfrak{P}$ ein Primteiler von $p \neq l$, so ist seine Trägheitsgruppe zyklisch, weil die Verzweigungsgruppe aus der Einheitssubstitution besteht. Ist l^u die Ordnung von $\mathfrak{T}$, so gilt nach Satz 1 die Kongruenz

$$p^n \equiv 1 \pmod{l^u},$$

wobei n der Grad von $\mathfrak{P}$ ist. Es muß nun gezeigt werden, daß bereits $p \equiv 1 \pmod{l^u}$ ist.

Zu dem Zweck bedenken wir, daß die Zerlegungsgruppe *Abel*sch ist. Daher muß $A^{-1}BA = B$ sein, oder

$$B^p = B, \text{ d. h. } B^{p-1} = E.$$

Da die Ordnung von B gleich der Ordnung von $\mathfrak{T}$ ist, so muß $p-1$ durch sie teilbar sein, w. z. b. w.

Hieraus folgt, daß der Körper der p-ten Einheitswurzeln einen Unterkörper vom Grade l^u besitzt. Adjungiert man ihn, soweit er nicht schon enthalten ist, so erhält man einen Körper vom Grade $l^{m+u'}$, wo $u' \leqq u$, und dessen Gruppe ist das direkte Produkt der ursprünglichen Körpergruppe und einer zyklischen Gruppe von der Ordnung $l^{u'}$. Ist $\mathfrak{P}_1$ irgendein Primteiler von $\mathfrak{P}$, so ist seine Trägheitsgruppe wiederum zyklisch und mindestens von der Ordnung l^u, andrerseits ist sie im direkten Produkt der Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}$ und der zyklischen Gruppe von der Ordnung $l^{u'}$ enthalten, und die höchste hierin vorkommende Potenz ist l^u. Daher ist die Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}_1$ genau von der Ordnung l^u. Der Trägheitskörper von $\mathfrak{P}_1$ besitzt eine zu p prime Diskriminante, und adjungiert man ihm den Kreiskörper, so erhält man wieder den obigen Körper. Man muß daher bloß noch von dem Trägheitskörper beweisen, daß er ein Kreiskörper ist, und seine Diskriminante enthält alle Teiler der ursprünglichen Diskriminante außer p. In dieser Weise kann man alle zu p primen Diskriminantenteiler herausschaffen und gelangt so zu einem *Abel*schen Körper, dessen Diskriminante und Grad Potenzen von l sind Es muß nun gezeigt werden, daß er ein Kreiskörper ist.

6. Es sei also k ein *Abel*scher Körper, dessen Grad und Diskriminante Potenzen von l sind. Ist $\mathfrak{L}$ ein Primteiler von l, so ist seine Verzweigungsgruppe gleich der Körpergruppe, denn es gibt keinen Körper, dessen Diskriminante 1 ist. Daher ist $\mathfrak{L}$ ein Primideal 1. Grades und nach Satz 2 ist der Index jeder Gruppe in der Reihe der Verzweigungsgruppen unter der vorhergehenden $= l$. Wir zeigen nun, daß es nur *einen* Unterkörper vom Grade l geben kann, und beweisen so, daß die Körpergruppe zyklisch ist. Der zu $\overline{\mathfrak{V}}$ gehörige Unterkörper ist vom Grade l, und seine Diskriminante ist durch eine niedrigere Potenz von $\mathfrak{L}$ teilbar als irgendeine Diskriminante eines anderen Unterkörpers, denn die Relativdifferente in bezug auf ihn ist nach seiner Definition durch die höchste Potenz von $\mathfrak{L}$ teilbar. Nun ist aber nur ein Wert für die Diskriminante möglich, wie folgende Betrachtung*) zeigt:

Sei $\mathfrak{l}$ der Primteiler von l in diesem Körper, so daß $\mathfrak{l}^l = (l)$, und λ eine genau durch $\mathfrak{l}$ teilbare ganze Zahl. Die Körperdifferente ist Teiler der Differente von λ. Ist nun $\lambda^l + \alpha_1 \lambda^{l-1} + \cdots + \alpha_l = 0$ die Gleichung von λ, so ist die Differente von λ:

$$l\lambda^{l-1} + (l-1)\,\alpha_1 \lambda^{l-2} + \cdots + \alpha_{l-1}.$$

Da jeder Summand durch eine andere Potenz von $\mathfrak{l}$ teilbar ist, so muß die Körperdifferente in jedem aufgehen, insbesondere in $l\lambda^{l-1}$. Hierin geht $\mathfrak{l}$ zur $(2l-1)$-ten Potenz auf, daher in einer Differenz $\lambda - \lambda'$ höchstens zur $\left[\frac{2l-1}{l-1}\right]$-ten.

Für $l > 2$ ist aber diese Zahl stets < 3 und kann daher nur 2 sein, da wir es mit einer Verzweigungsgruppe zu tun haben. In der Diskriminante geht daher $\mathfrak{l}$ zur $2(l-1)l$-ten Potenz auf, und sie hat den Wert $(l)^{2(l-1)}$.

Hiermit ist gezeigt, daß für $l > 2$ die Gruppe des Körpers zyklisch ist, und er muß daher mit dem Unterkörper vom Grade l^u des Körpers der l^{u+1}-ten Einheitswurzeln übereinstimmen, weil sonst durch Zusammensetzung ein nicht zyklischer Körper entstände.

7. Für $l = 2$ adjungiere man zunächst i; dann erhält man einen Körper von derselben Art. Nun gibt es relativ zu $k(i)$ nur einen derartigen quadratischen Körper, nämlich $k(i, \sqrt{2})$; denn ein solcher muß einen reellen

*) Vgl. *Fueter* l. c. S. 193.

quadratischen Unterkörper besitzen, dessen Diskriminante eine Potenz von 2 ist, und dieser kann nur $k(\sqrt{2})$ sein. Im Körper $k(i)$ besitzt daher unser Körper eine zyklische Gruppe, und auch er ist Kreiskörper, nämlich Unterkörper des Körpers der 2^{u+2}-ten Einheitswurzeln.

Hiermit ist der Fundamentalsatz bewiesen, und wir bemerken nur noch, daß alle adjungierten Kreiskörper die Relativdiskriminante 1 haben und daher, soweit sie nicht schon im Grundkörper enthalten waren, Stücke des Klassenkörpers sind. Besäßen sie nämlich nicht die Relativdiskriminante 1, so müßte diese durch $\mathfrak{P}$ resp. $\mathfrak{p}$ teilbar sein, und diese Primideale müßten daher Potenzen von Idealen werden, ihre Trägheitsgruppe hätte daher eine höhere Ordnung als l^u.

§ 3. Die Verzweigungsgruppe.

8. Wir betrachten zunächst die Verzweigungsgruppe von niedrigster Ordnung. Sie sei eine $\mathfrak{V}_i$, so daß ihre Substitutionen, mod. $\mathfrak{P}^{i+2}$ betrachtet, folgende Gestalt haben:

$$S_i: \quad \Pi' \equiv \Pi + \alpha \Pi^{i+1} \pmod{\mathfrak{P}^{i+2}}.$$

Setzt man sie zusammen mit einer beliebigen Substitution der Verzweigungsgruppe $\mathfrak{V}$:

$$S: \quad \Pi' \equiv \Pi + \alpha_1 \Pi^2 + \cdots + \alpha_{i+1} \Pi^{i+1} \pmod{\mathfrak{P}^{i+2}},$$

so erhält man:

$$S_i S: \quad \Pi' \equiv \Pi + \alpha_1 \Pi^2 + \cdots + \alpha_i \Pi^i + (\alpha + \alpha_{i+1}) \Pi^{i+1}.$$

Für $S S_i$ aber erhält man, wenn man bedenkt, daß aus S_i wegen des Automorphismus folgt:

$$\Pi'^k \equiv \Pi^k + k\alpha \Pi^{i+k} + \cdots \equiv \Pi^k \pmod{\mathfrak{P}^{i+2}}:$$

$$SS_i: \Pi' \equiv \Pi + \alpha_1 \Pi^2 + \cdots + \alpha_i \Pi^i + (\alpha + \alpha_{i+1}) \Pi^{i+1},$$

d. h. $SS_i = S_i S$.

Nimmt man statt der letzten Verzweigungsgruppe irgendeine andere $\mathfrak{V}^{(k)}$, so gilt dasselbe für die Faktorgruppen $\mathfrak{V}^{(k)}/\mathfrak{V}^{(k+1)}$ und $\mathfrak{V}/\mathfrak{V}^{k+1}$.

Wir sprechen den Satz aus:

Satz 3. Ist $\mathfrak{V}_i$ die letzte Verzweigungsgruppe, so gehört sie zum Zentrum der ganzen Verzweigungsgruppe $\mathfrak{V}$. Sind $\mathfrak{V}^{(k)}$ und $\mathfrak{V}^{(k+1)}$ irgend zwei aufeinanderfolgende Untergruppen in der Reihe der Verzweigungsgruppen, so gehört $\mathfrak{V}^{(k)}/\mathfrak{V}^{(k+1)}$ zum Zentrum von $\mathfrak{V}/\mathfrak{V}^{(k+1)}$.

9. Wir untersuchen nun der Reihe nach, wie eine Substitution einer Verzweigungsgruppe in der Trägheits- und Zerlegungsgruppe enthalten ist.

Ist S gegeben durch

$$S: \quad \Pi' \equiv \Pi + \alpha \Pi^{i+1} \pmod{\mathfrak{P}^{i+2}}$$

und ferner B aus der Trägheitsgruppe wie früher durch

$$B: \quad \Pi' \equiv \beta \Pi + \cdots \pmod{\mathfrak{P}^{i+2}},$$

so wird

$$B^{-1}: \quad \Pi' \equiv \beta^{-1} \Pi + \cdots \pmod{\mathfrak{P}^{i+2}}.$$

Daher erhält man Formel I:

$$\text{I.} \quad B^{-1} S B: \ \Pi' \equiv \Pi + \alpha \beta^i \Pi^{i+1} \pmod{\mathfrak{P}^{i+2}}.$$

Nimmt man A aus der *Zerlegungsgruppe*, wie in § 1, so erhält man:

$$A: \begin{matrix} \varrho' \equiv \varrho^p + \cdots \\ \Pi' \equiv \varrho^\alpha \Pi + \cdots \end{matrix} \qquad A^{-1}: \begin{matrix} \varrho' \equiv \varrho^{p^{n-1}} + \cdots \\ \Pi' \equiv \varrho^{-\alpha p^{n-1}} \Pi + \cdots \end{matrix}$$

und daraus Formel II:

$$\text{II.} \quad A^{-1} S A: \left.\begin{matrix} \varrho' \equiv \varrho \\ \Pi' \equiv \Pi + \alpha^p \varrho^{\alpha i} \Pi^{i+1} \end{matrix}\right\} \pmod{\mathfrak{P}^{i+2}}.$$

Um diese Formel zu gewinnen, bezeichne man zunächst allgemein die Substitution A^{-1} mit:

$$\varrho' \equiv f(\varrho, \Pi)$$
$$\Pi' \equiv g(\Pi).$$

Übt man nun S aus, so ändert sich ϱ' dabei nicht, und Π' wird einfach zu

$$\Pi' \equiv g(\Pi) + \alpha \varrho^{-\alpha p^{n-1}} \Pi^{i+1}.$$

Übt man nun A aus, so geht f und g wieder in ϱ resp. Π über und $\alpha \varrho^{-\alpha p^{n-1}} \Pi^{i+1}$ wird zu

$$\alpha^p \varrho^{-\alpha p^n} \varrho^{\alpha(i+1)} \Pi^{i+1} = \alpha^p \varrho^{\alpha i} \Pi^{i+1}.$$

10. Um die Verzweigungsgruppe näher zu untersuchen, denken wir uns eine sehr hohe Potenz $\mathfrak{P}^\varrho$ von $\mathfrak{P}$ als Modul genommen. Bei einer Substitution aus $\mathfrak{V}_i$ geht Π über in

$$\Pi' \equiv \Pi + \alpha \Pi^{i+1} + \cdots \pmod{\mathfrak{P}^\varrho},$$

und wegen des Automorphismus darf man diese Gleichung in eine beliebige Potenz erheben:

$$\left.\begin{matrix} \Pi'^2 \equiv \Pi^2 + 2\alpha \Pi^{i+2} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Pi'^k \equiv \Pi^k + k\alpha \Pi^{i+k+1} \end{matrix}\right\} \pmod{\mathfrak{P}^\varrho}$$

Hierbei erfahren also die Zahlen $\Pi, \Pi^2, \ldots, \Pi^{g-1}$ eine *lineare Substitution*. Sie ist aber von besonderer Art, nämlich alle Stellen unterhalb der Hauptdiagonale sind durch Nullen ausgefüllt, ferner bestehen die nach rechts oben an die Hauptdiagonale sich anschließenden schrägen Zeilen, die wir als *Nebendiagonalen* bezeichnen wollen, ebenfalls aus lauter Nullen bis zur i-ten (exkl. der Hauptdiagonale), die aus den Resten $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$ besteht. Eine solche Matrix bezeichnen wir, indem wir uns der Addition von Matrizen bedienen, mit $E + V_i$, wobei E die Einheitsmatrix bedeutet und V_i eine Matrix, bei der nur ein rechts oben befindliches Dreieck von 0 verschiedene Stellen enthält.

Die elementaren Regeln der Zusammensetzung ergeben:

$$V_i V_k = V_{i+k}.$$

Nun seien die beiden Substitutionen $E + V_i$ und $E + V_k$ *vertauschbar*. Dann wird, da

$$(E + V_i)(E + V_k) = E + V_i + V_k + V_i V_k,$$
$$V_i V_k \equiv V_k V_i.$$

Lautet die i-te Nebendiagonale in V_i: $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$, die k-te in V_k: $\beta, 2\beta, 3\beta, \ldots$, so lautet die $i+k$-te in $V_i V_k$: $(i+1)\alpha\beta$, $2(i+2)\alpha\beta$, $3(i+3)\alpha\beta, \ldots$.

Da g eine sehr große Zahl ist, so schließen wir hieraus, daß $(i+1)\alpha\beta \equiv (k+1)\alpha\beta \pmod{\mathfrak{P}}$ wird, d. h. daß $i \equiv k \pmod{p}$.

Nun ist eine Substitution aus der letzten Verzweigungsgruppe mit allen Substitutionen der Verzweigungsgruppe vertauschbar. Daraus schließen wir den Satz:

Satz 4. Ist $\mathfrak{V}_{i_1}, \mathfrak{V}_{i_2}, \ldots$ die Reihe der Verzweigungsgruppen, so sind die Indizes $i_1, i_2, \ldots$ einander kongruent mod. p.

Daher gilt diese Eigenschaft auch von den Zahlen $L, \bar{L}, \ldots$ etc. bei *Hilbert**), denn diese stimmen überein mit $i_1 + 1, i_2 + 1, \ldots$.

11. Nunmehr betrachten wir die p-te Potenz einer Substitution der letzten Verzweigungsgruppe. Sie gibt die identische Substitution, und daher muß für sie herauskommen

$$\Pi' \equiv \Pi \pmod{\mathfrak{P}^g}.$$

---

*) l. c. § 44.

Da E mit V_i vertauschbar ist, so wird

$$(E+V_i)^p = E + p\,V_i + \binom{p}{2} V_i^2 + \cdots + p\,V_i^{p-1} + V_i^p.$$

Läßt man zunächst V_i^p weg, so wird

$$\Pi' \equiv \Pi \pmod{\mathfrak{P}^{t+i+1}},$$

weil $\mathfrak{P}$ in p zur t-ten Potenz aufgeht, dagegen wird

$$\Pi' \not\equiv \Pi \pmod{\mathfrak{P}^{t+i+2}}.$$

Ist also $g \geqq t+i+2$ gewählt, so muß durch V_i^p die Kongruenz wieder gewonnen werden. Das ist aber nur so möglich, daß

$$t+i \geqq pi$$

ist, weil V_i^p mindestens eine V_{ip} ist.

Aus dieser Ungleichung folgt:

$$t \geqq i\,(p-1), \quad i \leqq \frac{t}{p-1}.$$

Der höchste vorkommende Index einer Verzweigungsgruppe V_i ist $i \leqq \frac{t}{p-1}$, die *Hilbert*schen Zahlen L sind $\leqq \frac{t}{p-1}+1$.

Betrachtet man also die Reste mod. $\mathfrak{P}^{\left[\frac{t}{p-1}\right]+2}$, so erfahren sie bei jeder von E verschiedenen Substitution der Zerlegungsgruppe eine Vertauschung.

Hiermit ist eine obere Grenze gewonnen worden für die Indizes i der Verzweigungsgruppen $\mathfrak{V}_i$, die man zu berücksichtigen hat. Der maximale Wert $\left[\frac{t}{p-1}\right]$ kann höchstens dann eintreten, wenn i durch p teilbar ist, weil dasselbe für t gilt.

Stellt nun $E+V_i$ eine beliebige Substitution der Verzweigungsgruppe dar, so wird $(E+V_i)^p$ eine Substitution von der Gestalt: $(E+V_{ip})$.

Eine genauere Betrachtung von V_i^p zeigt, daß man, falls i zu p prim ist, den Index noch um 1 erhöhen kann. Die pi-te Nebendiagonale in V_i^p lautet nämlich:

1. $(i+1).(2i+1)\ldots((p-1)\,i+1)\,\alpha^p,\ 2\,(i+2)\ldots((p-1)\,i+2)\,\alpha^p,\ldots$

und die Faktoren $1, i+1, \ldots$ durchlaufen ein vollständiges Restsystem mod. p, daher ist einer von ihnen durch p teilbar.

Hieraus folgt der Satz*):

*) Vgl. *Fueter*, Ein Satz über Iteration von Potenzreihen. Festschr. d. Naturf. Ges. in Zürich 1917.

Satz 5. Die p-te Potenz einer Substitution aus $\mathfrak{V}_i$ liegt in einer V_{ip+1}, sobald $i \not\equiv 0 \pmod{p}$ ist. Die p^r-te Potenz liegt in einer Gruppe $\mathfrak{V}_k$ mit dem Index

$$k = ip^r + p^{r-1} + \cdots + 1.$$

Man kann noch hinzufügen, daß die Indizes einander mod. p kongruent sein müssen. Ist nun $\bar{i}$ der kleinste positive Rest von i mod. p, so lautet der Satz schließlich so:

Satz 5'. Die p^r-te Potenz einer Substitution aus $\mathfrak{V}_i$ liegt stets in einer Gruppe $\mathfrak{V}_{ip^r+\bar{i}(p^{r-1}+\cdots+1)}$, wobei $\bar{i}$ den kleinsten nicht negativen Rest von i mod. p darstellt.

Ist i durch p teilbar und $i < \frac{t}{p-1}$, so ist die p-te Potenz einer Substitution stets in $\mathfrak{V}_{pi}$, aber nicht mehr in $\mathfrak{V}_{pi+1}$. Denn alsdann ist die Zahl $1\,(i+1)\,(2i+1)\ldots$ zu p prim.

§ 4. Anwendungen.

12. Im Körper K sei die Zerlegungsgruppe des Primideals $\mathfrak{P}$ *Abel*sch. Die Trägheitsgruppe sei von der Ordnung $s.\,p^r$, wobei s prim ist zu p, dann ist s der Index von $\mathfrak{V}$ unter $\mathfrak{T}$, und wie in § 2 schließen wir $p \equiv 1 \pmod{s}$.

Die Trägheitsgruppe ist das direkte Produkt einer zyklischen Gruppe $\mathfrak{S}$ von der Ordnung s und der Verzweigungsgruppe $\mathfrak{V}$, und beide sind Normalteiler von $\mathfrak{Z}$. Man bilde nun den zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Unterkörper. Er ist *Galois*sch im Zerlegungskörper, und $\mathfrak{P}^s = \mathfrak{p}$ ist das darin liegende Primideal, das durch $\mathfrak{P}$ teilbar ist. Wenn wir den Zerlegungskörper als Grundkörper zugrunde legen, statt des rationalen Körpers, so gelten genau die Sätze von § 1. Wenden wir speziell Formel II an und bemerken, daß $A^{-1}SA = S$ ist, so folgt:

$$\alpha^p \varrho^{ai} \equiv \alpha.$$

Diese Gleichung für α besitzt die Lösung $\alpha \equiv 0$, sowie diejenigen von

$$\alpha^{p-1} \varrho^{ai} \equiv 1,$$

und die letztere hat nur noch $p-1$ Lösungen. Daher kann α nur p ver-

schiedene Werte annehmen, nämlich, wenn α einen davon bezeichnet: $i\alpha\,(i = 0, 1, \ldots p-1)$, und wir schließen daraus, daß der Index einer Verzweigungsgruppe unter der vorhergehenden p ist. Hieraus folgt für $p > 2$, wie in § 2, daß die Verzweigungsgruppe zyklisch ist.

13. Für $p = 2$ liegen die Verhältnisse etwas komplizierter. Es sei 2^r wieder die Ordnung von $\mathfrak{B}$, ferner $\mathfrak{p}^{2^{r-2}} = \mathfrak{l}$, dann ist $\mathfrak{l}$ Primideal in jedem Unterkörper, der zum Trägheitskörper den Relativgrad 4 hat. Einen solchen betrachten wir jetzt. Die Verzweigungsgruppe $\mathfrak{B}$ ist von der Ordnung 4 und wie in § 2 eine $\mathfrak{B}_1$ oder eine $\mathfrak{B}_2$. Nehmen wir den ersten Fall, so ist wegen Satz 4 $\overline{\mathfrak{B}}$ eine $\mathfrak{B}_3$ oder $\mathfrak{B}_5$ usw. Ist λ eine durch $\mathfrak{l}$, aber nicht durch $\mathfrak{l}^2$ teilbare Zahl und

$$\lambda^2 + \lambda_1 \lambda + \lambda_2 = 0$$

die Gleichung von λ in einem relativ quadratischen Unterkörper, so erhält man für die Relativdifferente von λ:

$$\lambda - \lambda' = 2\lambda + \lambda_1.$$

Und in dieser Differenz geht $\mathfrak{l}$ höchstens zur 5-ten Potenz auf. Daher ist $\overline{\mathfrak{B}}$ höchstens eine $\mathfrak{B}_4$ und daher genau eine $\mathfrak{B}_3$. Der biquadratische Körper ist daher der zweimal überstrichene Verzweigungskörper des ganzen Körpers, denn auch hier muß $\overline{\mathfrak{B}}$ eine $\mathfrak{B}_3$ sein, wenn $\mathfrak{B}$ eine $\mathfrak{B}_1$ ist. Weiter schließen wir aber, daß es nur einen relativ zu $\overline{\mathfrak{B}}$ quadratischen Körper geben kann, nämlich den zweimal überstrichenen Verzweigungskörper; denn jeder andere müßte eine Relativdifferente besitzen, die durch eine höhere Potenz von $\mathfrak{l}$ teilbar ist. Also ist $\overline{\mathfrak{B}}$ zyklisch, $\mathfrak{B}$ selber ist also zyklisch oder vom Typus $(2^{r-1}, 2)$.

Wir fassen die Resultate zusammen im folgenden

Satz 6. Ist die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{P}$ *Abel*sch und hat die Trägheitsgruppe die Ordnung sp^r, so ist $p \equiv 1 \pmod{s}$. Ferner ist für $p > 2$ die Verzweigungsgruppe zyklisch, für $p = 2$ ebenfalls zyklisch oder vom Typus $(2^{r-1}, 2)$.

Man sieht sofort, daß der Körper der p^{r+1}-ten, resp. 2^{r+2}-ten Einheitswurzeln gerade einen Unterkörper K' besitzt, dessen Gruppe mit der Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}$ übereinstimmt. Adjungiert man ihn zu K, so ist die Zerlegungsgruppe eines Primteilers $\mathfrak{P}_1$ von $\mathfrak{P}$ wiederum *Abel*sch, und wie

in § 2 zeigt man, daß die Ordnung der Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}_1$ dieselbe ist wie für $\mathfrak{P}$. Daraus folgt, daß $\mathfrak{P}$ durch Adjunktion des Kreiskörpers nicht Potenz eines Ideals wird und daß K' in bezug auf K unverzweigt ist. Hieraus folgt der

Satz 7. Ist die Zerlegungsgruppe eines Primideals $\mathfrak{P}$ in K *Abel*sch und seine Trägheitsgruppe von der Ordnung sp^r, so ist $p \equiv 1 \pmod{s}$ und der Körper der p^{r+1}-ten (2^{r+2}-ten) Einheitswurzeln enthält einen Unterkörper vom Grade $s.p^r$, dessen Relativdiskriminante zu K (1) ist. Soweit er nicht in K enthalten ist, bildet er also ein Stück des Klassenkörpers von K.

14. Indem wir den von Herrn *Fueter* behandelten Fall verallgemeinern, stellen wir uns jetzt das Problem, eine Zerlegungsgruppe von folgender Art zu untersuchen: $\mathfrak{Z}$ besitzt einen *Abel*schen Normalteiler $\mathfrak{N}$, dessen Ordnung eine Potenz der Primzahl l und dessen Index 2 ist. Ist S eine Substitution des Normalteilers und T eine solche außerhalb desselben, so soll die Relation gelten:

$$T^{-1} S T = S^{-1}.$$

Ist zunächst das Primideal $\mathfrak{P}$, dessen Zerlegungsgruppe durch $\mathfrak{Z}$ gegeben ist, prim zu l, so ist seine Verzweigungsgruppe die Einheitsgruppe, bestehend aus der identischen Substitution. Die Trägheitsgruppe muß ein zyklischer Normalteiler mit zyklischer Faktorgruppe sein, und das kann nur $\mathfrak{N}$ sein, denn $\mathfrak{N}$ ist die einzige *Abel*sche Untergruppe mit zyklischer Faktorgruppe. $\mathfrak{N}$ muß daher selber zyklisch sein. Ist l^u die Ordnung von $\mathfrak{N}$, so ergibt sich aus Satz 1, wo nun $n = 2$, $r = l^u$ ist, B mit S zu bezeichnen ist und A mit T:

$$T^{-1} S T = S^p = S^{-1}$$

oder $S^{p+1} = E$.

Daraus folgt, daß $p \equiv -1 \pmod{l^u}$ ist.

15. Nun sei $\mathfrak{P}$ ein Teiler von l. Wir bezeichnen daher jetzt $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{p}$. Nimmt man zunächst an, daß die Trägheitsgruppe von $\mathfrak{p}$ mit der Verzweigungsgruppe übereinstimmt, dann ist $\mathfrak{N}$ die Verzweigungsgruppe und $\mathfrak{p}$ vom Grade 2 und Formel II ist anzuwenden mit $A = T$, $p = l$, $\Pi = \Lambda$.

Es muß gelten: $T^{-1} S T = T^{-1}$.

Nun ist S^{-1} von der Gestalt $\Lambda' \equiv \Lambda - \alpha \Lambda^{i+1} \pmod{L^{i+2}}$, daher wird $\alpha^l \varrho^{ai} \equiv -\alpha$.

Die Wurzeln sind $\alpha \equiv 0$ und diejenigen von

$$\alpha^{l-1} \varrho^{ai} \equiv -1.$$

Diese Gleichung hat wiederum $l-1$ Wurzeln, und daraus schließen wir, daß der Index einer Verzweigungsgruppe unter der vorhergehenden l ist, und daraus folgt, wie im *Abel*schen Fall, daß für $l > 2$ die Verzweigungsgruppe zyklisch, für $l = 2$ zyklisch oder vom Typus $(2^{u-1}, 2)$ ist.

16. Nunmehr sei die ganze Gruppe Trägheitsgruppe und $l > 2$. Dann ist $\mathfrak{L}$ ein Ideal vom ersten Grade und $\mathfrak{N}$ die Verzweigungsgruppe.

Formel I ergibt: $\alpha \beta^i \equiv -\alpha \pmod{\mathfrak{L}}$ und daher $\beta^i \equiv -1 \pmod{\mathfrak{L}}$.

Da $\beta^2 \equiv +1$ ist, so muß i ungerade sein, also kommen nur solche Verzweigungsgruppen $\mathfrak{V}_i$ vor, für die i ungerade ist. Außerdem müssen die verschiedenen Indizes i einander (mod. p) kongruent sein, nach Satz 4.

Wir betrachten einen zum Verzweigungskörper relativen Körper vom Grade l. Es sei $\mathfrak{l}$ das durch $\mathfrak{L}$ teilbare Primideal, dann geht in l genau die $2\,l$-te Potenz von $\mathfrak{l}$ auf.

Die Relativgruppe von der Ordnung l ist Verzweigungsgruppe von $\mathfrak{l}$. Ist sie eine $\mathfrak{V}_i$, so wird $i \leqq \frac{t}{l-1} = \frac{2l}{l-1} = 2 + \frac{2}{l-1}$.

Ist daher $l > 3$, so wird $i \leqq 2$. Nun muß i aber ungerade sein und daher gleich 1. Hieraus folgt, daß für einen Körper der betrachteten Art nur eine bestimmte Potenz von l in der Relativdiskriminante enthalten sein kann, und die ganze Verzweigungsgruppe ist zyklisch.

17. Für $l = 3$ gilt derselbe Satz, nur ist er etwas weniger einfach zu beweisen. Hier kann $i = 1$ oder 3 sein. Nehmen wir nun einen Relativkörper vom Grade 9 zum Verzweigungskörper an, dessen Relativgruppe vom Typus (3, 3) ist, mit den Basiselementen S_1 und S_2. Ist die durch S_2 erzeugte Gruppe die $\overline{\mathfrak{V}}$, dann ist sie sicher eine $\mathfrak{V}_7$ oder $\mathfrak{V}_{13}$, weil ihr Index ungerade und $\equiv 1 \pmod 3$ sein muß. Es sei also: S_2: $\Lambda' \equiv \Lambda + \Lambda_8 \pmod{\mathfrak{L}^9}$, wo Λ_8 durch $\mathfrak{L}^8$ teilbar ist.

Hieraus folgt, wenn wir die Substitutionen S_1 und S_1^2 ausführen:

$$\left.\begin{aligned} S_1 \Lambda' &\equiv S_1 \Lambda + S_1 \Lambda_8 \\ S_1^2 \Lambda' &\equiv S_1^2 \Lambda + S_1^2 \Lambda_8 \end{aligned}\right\} \pmod{\mathfrak{L}^9},$$

und wenn wir die drei Kongruenzen multiplizieren:

$$N m_1 \Lambda' \equiv N m_1 \Lambda + (\Lambda_{10} + S_1 \Lambda_{10} + S_1^2 \Lambda_{10}) + \Lambda_{17},$$

wenn $\Lambda_8 S_1 \Lambda S_1^2 \Lambda$ mit Λ_{10} bezeichnet wird.

Nun liegt $N m_1 \Lambda' = \lambda'$ in dem zu der durch S_1 erzeugten Untergruppe gehörigen Körper, dessen Relativgrad 3 ist. Außerdem ist diese Zahl durch das in diesem Körper befindliche Primideal $\mathfrak{L}^3$ genau einmal teilbar.

Es muß nun die Relativspur von Λ_{10} untersucht werden. Λ_{10}, $S_1 \Lambda_{10}$ und $S_1^2 \Lambda_{10}$ mögen der Gleichung genügen:

$$x^3 + \mu x^2 + \gamma x + \varrho \equiv 0.$$

Dann ist die Differente von Λ_{10}:

$$3 \Lambda_{10}^2 + 2\mu \Lambda_{10} + \gamma.$$

In den drei Termen dieser Summe geht $\mathfrak{L}$ zu verschiedenen Potenzen auf. Die Differente von Λ_{10} ist aber mindestens durch $\mathfrak{L}^{24}$ teilbar, daher μ durch $\mathfrak{L}^{10}$ und daher $S_2 \lambda - \lambda$ durch $(\mathfrak{L}^3)^5$. i wäre also mindestens 4 entgegen dem am Anfang Bewiesenen, also ist die Verzweigungsgruppe zyklisch.

Ist schließlich $l = 2$, so ist die ganze Gruppe Verzweigungsgruppe, und man beweist genau wie im *Abel*schen Fall, daß sie einen zyklischen Normalteiler vom Index 2 enthält, d. h. $\mathfrak{N}$ ist zyklisch.

Wir fassen alles zusammen in dem

Satz 8: Ist die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{P}$ von der in 14. angegebenen Art, so ist, falls die durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primzahl $p \neq l$:

$$p \equiv -1 \pmod{l^u};$$

falls $p = l > 2$, ist der *Abel*sche Normalteiler $\mathfrak{N}$ Verzweigungsgruppe von $\mathfrak{P}$ und zyklisch; falls $p = l = 2$, ist die Gruppe entweder Verzweigungsgruppe, dann ist $\mathfrak{N}$ zyklisch, oder $\mathfrak{N}$ ist Verzweigungsgruppe und alsdann zyklisch oder vom Typus $(2^{u-1}, 2)$.

Die

Vossische Zeitung

kämpft auf dem Boden bürgerlich-demokratischer Weltanschauung für die Vereinigung aller ehrlich demokratischen Elemente, die an dem freiheitlichen und sozialen Neubau des Deutschen Reiches mitzuarbeiten gewillt sind. Die Vossische Zeitung tritt für die Einheit aller deutschen Stämme auf der Grundlage des Selbstbestimmungsrechtes der Völker ein.

Die Vossische Zeitung hält die Betonung der nationalen Eigenart und die nationale Selbstachtung jedes Volkes für selbstverständliche Voraussetzung eines gedeihlichen Arbeitens aller Nationen in einem Bunde der Völker. Die Vossische Zeitung verlangt im Innern des Reiches das demokratische Mitbestimmungsrecht aller Glieder des Volkes und verwirft jede Diktatur eines einzelnen Standes, einer einzelnen Klasse und einzelner Personenkreise.

Die Vossische Zeitung hält tiefgreifende soziale Änderungen im deutschen Wirtschaftsleben für unabweisbar. Der Erfolg dieser Umformung muß Kräftigung, nicht Zerstörung der deutschen Produktivität sein.

Die Vossische Zeitung will in ihrem literarischen Teil für das Ergebnis der freien wissenschaftlichen Forschung und alle Gebiete des künstlerischen Schaffens Liebe und Verständnis wecken.

Monatlich M. 3.25 bei allen Postanstalten und beim Verlag Ullstein & Co., Berlin SW 68

Aus den Schriften der Preußischen Akademie der Wissenschaften Berlin

Born, M., Die elektromagnetische Masse der Kristalle. 7 S. 8° ..... —.50

— Über die Maxwellsche Beziehung zwischen Brechungsindex und Dielektrizitätskonstante und über eine Methode zur Bestimmung der Ionenladung in Kristallen. 10 S. 8° ..... —.50

— und **A. Landé**, Über die absolute Berechnung der Kristalleigenschaften mit Hilfe Bohrscher Atommodelle. 22 S. 8° ..... 1.—

Einstein, A., Der Energiesatz in der allgemeinen Relativitätstheorie. 12 S. 8° ..... —.50

— Über Gravitationswellen. 14 S. 8° ..... —.50

Freundlich, Erwin, Über die singulären Stellen der Lösungen des n-Körper-Problems. I. Mitteilung. 22 S. 8° ..... 1.—

Ginzel, F. K., Beiträge zur Kenntnis der historischen Sonnenfinsternisse und zur Frage ihrer Verwendbarkeit. 43 S. mit 2 Tafeln. 4° ..... 3.—

— Über die Störungen der Bahn des Olbersschen Kometen in der Marsnähe 1887. 8 S. 8° ..... —.50

Hellmann, G., Über die nächtliche Abkühlung der bodennahen Luftschicht. 8 S. 8° ..... —.50

— Über milde Winter. 8 S. 8° ..... —.50

— Über strenge Winter. 22 S. 8° ..... 1.—

— Über warme und kalte Sommer. 17 S. 8° ..... 1.—

Liebisch, Th., Über Kristalle mit optischem Drehungsvermögen. 19 S. mit 3 Tafeln. 8° ..... 1.—

— und **A. Wenzel**, Die Interferenzfarben des Quarzes und des Natriumchlorats im polarisierten Licht. II. 31 S. 8° ..... 1.—

Nacken, R., Über die Grenzen der Mischkristallbildung zwischen Kaliumchlorid und Natriumchlorid. 9 S. 8° ..... —.50

Neuberg, C., Über eine allgemeine Beziehung der Aldehyde zu der alkoholischen Gärung und den Atmungsvorgängen. 15 S. 8° ..... —.50

Struve, Georg, Neue Elemente der inneren Saturnstrabanten. Abgeleitet aus den in Washington und an der Yerkes-Sternwarte angestellten Beobachtungen. 1903—1914. 131 S. 4° ..... 7.—

Struve, H., Prüfung der Uhrwerke an den Äquatorealen der Babelsberger Sternwarte. 14 S. 8° ..... —.50

Warburg, E., Über den Energieumsatz bei photochemischen Vorgängen in Gasen. VII. Photolyse des Jodwasserstoffs. 18 S. 8° ..... 1.—

Weyl, Hermann, Gravitation und Elektrizität. 16 S. 8° ..... —.50

Verlag von Georg Reimer Berlin W. 10